

O pêndulo simples como mediador de conceitos e métodos no ensino de Física**The simple pendulum mediating concepts and methods in teaching of Physics**

DOI:10.34117/bjdv6n1-352

Recebimento dos originais: 30/11/2019

Aceitação para publicação: 30/01/2020

Thiago de Cacio Luchese

Doutor em Física pela Universidade Federal de Santa Catarina
Universidade Federal da Fronteira Sul
Rua Jacob Reinaldo Haupenthal, 1580 – São Pedro, Cerro Largo – RS, Brasil
E-mail:thiago.luchese@uffs.edu.br

Alecsander Mergen

Graduado em Física – Licenciatura pela Universidade Federal da Fronteira Sul
Universidade Federal da Fronteira Sul
Rua Jacob Reinaldo Haupenthal, 1580 – São Pedro, Cerro Largo – RS, Brasil
E-mail:alecsandermergen@hotmail.com

Rosália Andrighetto

Doutora em Química pela Universidade Federal de Santa Maria
Universidade Federal da Fronteira Sul
Rua Jacob Reinaldo Haupenthal, 1580 – São Pedro, Cerro Largo – RS, Brasil
E-mail:rosalia.andrighetto@uffs.edu.br

RESUMO

Apresentamos o pêndulo simples como ferramenta capaz de mediar a construção de conceitos e metodologias investigativas relevantes para a Física e seu ensino. Embora abordado à exaustão na literatura correlata, o pêndulo simples e seu potencial qual mediador de conceitos no âmbito de ensino-aprendizagem dos estudantes está aquém de ser exaurido. Ao explorá-lo com auxílio de um software livre para a aquisição e o processamento de dados, o Tracker, permite-se a vivência com tecnologias de informação e comunicação para a construção de dados quantitativos relevantes, tanto em um ambiente de sala de aula quanto em um estudo dirigido. Pretende-se que a exposição desse trabalho venha a estimular o desenvolvimento de atividades experimentais em sala de aula e, para além disso, que venha a ser frutífero no desenvolvimento de aprendizagem crítica das Ciências, de seu contexto (história, implicações sociais, econômicas e culturais) e das suas limitações, viabilizando a construção prática de um ambiente propício à multidisciplinaridade, seja no ensino básico ou superior.

Palavras-chave: Tracker, empirismo, modelagem.

ABSTRACT

We present the simple pendulum as a tool capable of mediating the construction of concepts and investigative methodologies relevant to physics and its teaching. Although approached to exhaustion in related literature, the simple pendulum and its potential as a mediator of concepts in the teaching-learning environment of students is far from exhausted. By exploiting it with the help of free software for data acquisition and processing, the Tracker, we pave the way to experience information and communication technologies to build relevant quantitative data, both in a classroom environment and in a directed study. The exposition of this work is intended to stimulate the development of experimental activities in the classroom and, moreover, to be fruitful in the development of critical learning of the sciences, its context (history, social, economic and cultural implications) and its limitations, enabling the practical construction of an environment conducive to multidisciplinary, whether in primary or higher education.

Keywords: Tracker, empiricism, modeling.

1 INTRODUÇÃO

Há anos a popularização da internet e o consequente acesso à informação, bem como a possibilidade de livre divulgação de opiniões e formas de compreender o mundo, tem feito emergir uma necessidade educacional diferenciada, a saber, a de habilitar o educando de qualquer nível de ensino a filtrar conscientemente e com critérios “adequados” quais dessas informações são, de fato, confiáveis. Dito de forma a complementar e caracterizar melhor a problemática que está sendo levantada, o papel do professor está migrando daquele que domina os constructos de conhecimento e media sua construção em uma dada turma e componente curricular para aquele que, para além de fazer tal mediação, precisa fornecer subsídios lógico-rationais para uma turma aceitar que uma determinada compreensão constituída – o que não quer dizer que seja completa – deva ser considerada como digna de respeito científico-acadêmico.

O presente trabalho resulta de uma tentativa de abordar essa problemática moderna, mesmo que superficialmente, por meio do estudo do pêndulo simples e tem a intenção de provocar reflexões epistemológicas sobre o processo de recorte de realidade, modelização e produção de conhecimento científico em Física (MACHADO, CRUZ, 2011). Embora o exemplo fonte das reflexões aqui proposto seja apenas um, essas reflexões podem ser estendidas a outros objetos de estudo e áreas do conhecimento de modo a influenciar positivamente a forma como o conhecimento dito científico é apresentado aos estudantes. Acreditamos que a presente abordagem ao estudo do pêndulo simples tem potencial de impulsionar discussões em âmbito qualitativo e quantitativo, sendo que, dentre as várias

possíveis resultantes, uma delas pode ser o aprimoramento da criticidade de professores e estudantes em relação ao conhecimento científico. Espera-se que a significação de conceitos como "equação empírica", "modelo" e "teoria", para citar alguns, aconteça de forma natural e expanda-se para outros ramos de conhecimento, para além da Física, apresentando ferramentas e estimulando o ímpeto investigativo de estudantes de ensino básico e superior. Nas seções seguintes, ao abordar o pêndulo simples, pretende-se explicitar que o uso de aproximações da realidade, por meio do processo de modelização, para que a própria realidade mostre-se racionalmente cognoscível, é uma necessidade. No processo de modelagem do pêndulo, o recorte da fenomenologia oscilatória adaptado ao interesse do investigador é apresentado e são abordados, ainda que de passagem, conceitos como *reprodutibilidade* e *incertezas* nos processos de medida. Por outro lado, após a modelização do recorte escolhido, apresentam-se os resultados quantitativos decorrentes do recorte e determina-se uma equação empírica que relaciona o período do pêndulo simples ao seu comprimento – sendo muito importante destacar, aqui, que o conhecimento científico não resulta apenas de empirismo ou racionalismo isolados, mas que ambos se complementam (MACHADO, CRUZ, 2011). Nesse caminho quantitativo pretende-se estimular a criticidade quanto às limitações intrínsecas dos processos de experimentação e medida, limitações essas que podem ser cada vez mais reduzidas mas nunca eliminadas por completo – consequência do tratamento modelado da realidade, tratamento próprio das ciências factuais à natureza.

Em seguida a essas descrições, em seção separada, tenta-se entender a relação empírica obtida à luz da aplicação da Segunda Lei de Newton ao pêndulo simples. Dessa vez os destaques da abordagem recaem sobre a capacidade superior de previsão que uma teoria oferece em relação a um resultado empírico, à diferenciação entre teoria e modelo e à evidenciação da necessidade de ambos para avançar na compreensão dos mecanismos que levam ao comportamento tido como natural dos eventos dinâmicos que nos cercam. Nota-se, nesse processo, que, por vezes, há necessidade de aproximar o tratamento matemático (aproximação matemática) para chegar a um resultado que diz respeito a uma aproximação da realidade (aproximação física). Por fim, observa-se que, embora ocorram sucessivos processos aproximativos (necessários para atingir um término de trabalho), há muita satisfação em ver que esses resultados evidenciam compreensão da natureza pela sua capacidade de previsão e explicação de fenômenos, sendo essa compatibilidade o grande triunfo e fonte de satisfação dos amantes das ciências factuais. Finalmente, na última seção desse trabalho, são tecidas algumas observações adicionais.

2 EMPIRISMO E O PÊNDBULO SIMPLES

Um objeto preso a um fio que, por sua vez, está amarrado a um suporte de modo a permitir o balanço do objeto para lá e para cá é chamado de *pêndulo*. Esse sistema é dito ser *simples* quando a massa do objeto é muito maior que a massa do fio que o suspende, quando as variações do comprimento do fio são imperceptíveis frente a (muito menores que) distância que separa o objeto do suporte durante a oscilação (distância essa chamada de *comprimento* do pêndulo, de agora em diante) e, por fim, quando o ângulo descrito pelo fio suspenso em relação à sua posição de repouso é inferior a 10° , o que equivale a dizer que a distância entre os pontos de máximo deslocamento do objeto em relação à sua posição de repouso é inferior a, digamos, 10% do comprimento do pêndulo. Sob essas condições (recorte da realidade do pêndulo), justificadas *a posteriori* pelo aumento de compreensão a respeito de sua dinâmica, temos o chamado *pêndulo simples* – deve-se notar que a literatura a respeito do pêndulo no sentido de flexibilizar as restrições que o tornam *simples* é muito abundante; citando alguns exemplos, temos em (NELSON, OLSSON, 1986) a consideração de inúmeras correções ao cálculo do período do pêndulo para um dado comprimento; em (CARVALHAES, SUPPES, 2009) explicita-se um método numérico para previsão de período de oscilação para grandes amplitudes; em (LOPES, SUAVE, NOGUEIRA, 2018) há uma revisão de algumas expressões analíticas simples, bem como suas limitações, para prever o período de um pêndulo simples em grandes amplitudes de oscilação; em (SUAVE, NOGUEIRA, 2016) há o estudo do período de oscilação de um pêndulo simples no limite de comprimentos longos, da ordem do raio da Terra, e a obtenção de um período pendular máximo; esses poucos exemplos demonstram que, de fato, o pêndulo é um sistema muito interessante para a Física e seu ensino!

Antes de proceder com a descrição da atividade é muito importante deixar claro que, na proposta de estudo que desenvolvemos com a intenção de estimular o uso do pêndulo em sala de aula para explorar sua riqueza conceitual, conforme delineado na introdução e nas palavras que se seguirão, não há qualquer intenção de fazer apologia a tentativas de se chegar em leis a partir de sistemas particulares (MACHADO, CRUZ, 2011; SILVEIRA, OSTERMANN, 2002). Há, sim, um desejo sincero de estimular a racionalidade crítica a respeito do que conhecemos, facilitando a compreensão dos caminhos científicos e suas terminologias, fomentando o interesse para o fazer por si dos estudantes, independente do seu nível de instrução, uma vez que há uma multiplicidade de formas de coleta e processamento objetivo de dados experimentais possibilitados por dispositivos portáteis e softwares livres, bem como abundante disponibilidade de textos e vídeos explicativos do status atual da Física

no que tange suas representações teóricas da realidade.

A nossa atividade investigativo-crítica de incentivo ao alcance de um constructo teórico *per si* do pêndulo simples iniciou com a observação, o mais epistemologicamente neutra possível, do movimento pendular simples de um objeto não escolhido ao acaso: uma pequena esfera de material ferromagnético amarrada a um fio de nylon preso a um suporte de parede. Essa observação conduziu, naturalmente, a fatos: caso a esferinha seja solta à mão, mesmo que com cuidado, o movimento oscilatório, desde seu início, não se dá em uma linha de vai e vem mas em uma figura geométrica do tipo elipsoidal; à medida que o movimento é deixado ao natural, a figura elipsoidal vai se tornando mais e mais circular ao passo que a amplitude de oscilação vai diminuindo continuamente; por fim, a pequena esfera pára de mover-se, atingindo sua posição de repouso.

Nascem, então, algumas restrições adicionais sobre o objeto de estudo (pêndulo simples) a partir da familiarização com sua fenomenologia: a esfera precisa ser solta, sempre, com o máximo de cuidado; propõe-se um mecanismo não manual para produzir a perturbação inicial – um eletroímã ligado suspende a esfera a uma determinada distância de sua posição de repouso e, quando desligado, dá-se início à dinâmica objeto de nosso estudo. Desse modo, todas as vezes que a dinâmica é observada, ela se dá de maneira idêntica para os nossos sentidos. Estabelece-se a reprodutibilidade do experimento quando separa-se a atuação mecânica do observador e do observado. Apresenta-se na Figura 1, à esquerda, uma foto do sistema objeto de estudo já sob investigação.

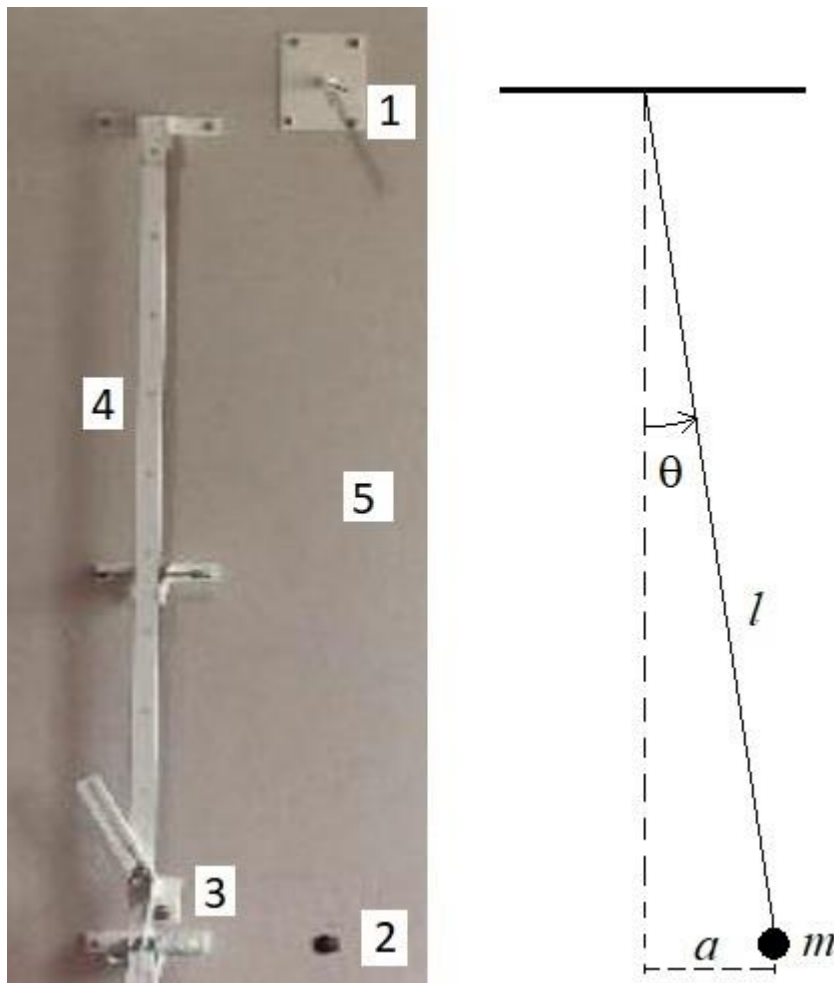


Figura 1: À esquerda nota-se o pêndulo simples deste relato em uma foto, estando ali indicados: (1) o suporte do pêndulo, (2) a massa oscilante, (3) o eletroímã usado para dar início às oscilações, (4) o suporte do eletroímã e (5) o fio que suspende a massa oscilante (ele não é notado na foto, apenas indicado a critério de completude de apresentação do aparato). À direita apresenta-se um esquema do pêndulo simples experimental, indicando as grandezas mensuráveis e passíveis de serem estimadas também em sala de aula, a saber: l é o comprimento do pêndulo, m a massa suspensa, a a amplitude de oscilação e θ o ângulo de deflexão a partir da posição de repouso (indicada pela linha tracejada).

Após esse ajuste à forma de iniciar a oscilação do pêndulo os fatos observados continuam a ser os mesmos que aqueles descritos anteriormente, exceto por: i) reprodutibilidade da dinâmica; ii) a dinâmica de vai e vem da pequena esfera se dá, precisamente, sobre uma linha, pelo menos por um certo intervalo de tempo. Ainda é observado que, aos poucos, essa dinâmica sobre uma linha torna-se uma figura elipsoidal e, em seguida, ocorre conforme descrito anteriormente. Nasce o novo recorte do objeto: a dinâmica será observada apenas em um intervalo de tempo em que a esfera desloca-se sobre

uma linha de vai e vem, ou seja, enquanto não há, visualmente, a formação da figura elipsoidal de oscilação.

Feito o recorte observacional do objeto de estudo, são determinadas as grandezas que podem ser alteradas ou controladas em nosso objeto nesse recorte estabelecido. Assim, o comprimento do fio pode ser facilmente alterado e medido, a massa do objeto suspenso pode ser modificada pela alternância entre esferas de diferentes materiais, a amplitude de oscilação pode ser alterada facilmente pelo reposicionamento do eletroímã e, por fim, com auxílio de um cronômetro, pode-se estimar o período de oscilação do pêndulo. Tratam-se, então, de quatro diferentes dados experimentais diretamente acessíveis.

Naturalmente, pelo próprio processo construtivo-observacional, mede-se o período após o estabelecimento de um dado conjunto de parâmetros constitutivos do pêndulo: comprimento, massa e amplitude. Por esse processo, a pergunta natural a surgir é: dado um conjunto de parâmetros construtivos, é possível determinar o período? (Deve-se notar que essa pergunta já foi sugerida como método de determinação do comprimento padrão por Huygens, ver (MATTHEWS, 2001).)

A dependência do período com a massa pode ser eliminada por meio da adaptação, para o nosso sistema, de um argumento devido a Galileu em favor da igualdade de aceleração de corpos em queda livre nas proximidades da Terra. Parte-se da hipótese de que o período é tanto menor quanto maior for a massa suspensa, ou seja, a frequência é proporcional à massa. Sejam, então, duas semi-esferas de mesmo diâmetro e massas distintas, a saber M e m com $M > m$. A hipótese levantada implica, logicamente, que $f(M) > f(m)$, sendo $f(M)$ a frequência de oscilação da massa maior e $f(m)$ aquela da massa menor. Seja, agora, a esfera resultante da união dessas duas semi-esferas, com massa $m' = m + M > M$. Duas conclusões antagônicas a respeito da frequência de oscilação dessa nova esfera decorrem lógica e imediatamente: (i) a frequência de oscilação da nova esfera ($f(m')$) será, necessariamente, maior que a frequência da maior massa, $f(m') > f(M)$, uma vez que $m' > M$; (ii) a frequência de oscilação $f(m')$ será, necessariamente, menor que a frequência da maior massa, $f(m') < f(M)$, pois o acoplamento de m à massa M leva ao retardamento da oscilação da maior massa, implicando em uma redução da frequência de oscilação dessa. Ora: uma hipótese e duas conclusões distintas trata-se de absurdo lógico! Esse absurdo leva à conclusão de que a hipótese inicial é errônea e implica, imediatamente, em sua correção para a afirmação de que *a frequência independe da massa*. Essa nova afirmação não leva à contradição explicitada – devendo-se notar que, caso o raciocínio tivesse sido desenvolvido com a hipótese de *período proporcional à massa* também

chegaríamos à mesma inconsistência lógica, de modo que a única forma de remover tal inconsistência é supor que *o período é independente da massa*.

O método de eliminação da dependência do período com a massa explicita outro método investigativo: o *racionalista*. Cabe destacar que o racionalismo, embora seja extremamente útil, a validação de suas conclusões como sendo descritivas da realidade factual só pode ser dada por verificação experimental. Em paralelo ao método investigativo racionalista tem-se o *empirista*. No empirismo puro há somente conclusões a partir de medidas, o que já se entende não ser capaz de ensinar muito a respeito da estrutura da natureza (KUHN, 1998). Desse modo, racionalismo e empirismo são complementares na construção do que entendemos ser compreensão da estrutura da natureza.

Com a finalidade de oportunizar a vivência de aquisição e processamento de dados com o uso de softwares, utilizamos o software livre Tracker, que faz análise de vídeo quadro a quadro (disponível em <https://physlets.org/tracker/>) - o uso do Tracker tem sido interessante para o Ensino de Física, por exemplo, notar as referências (BONVENTI JR., ARANHA, 2015) e (BEZERRA *et. al.*, 2012). Para sistematizar a investigação, primeiro fixamos um comprimento e observamos o período de oscilação para diversas amplitudes; posteriormente fixamos uma amplitude e variamos o comprimento.

Investigando, então, a dependência do período com a amplitude de oscilação do movimento, construiu-se a Tabela 1. Nela estão registrados os vários instantes de reinício de ciclo de oscilação conforme os dados da trajetória posição em função do tempo que o Tracker construiu. O comprimento do pêndulo para levantamento desses dados foi mantido fixo e igual a $(1,000 \pm 0,002)$ m. O recorte de tempo que adotamos para todas as análises efetuadas com o software foi de 10 períodos completos de oscilação. Deve-se notar que o erro associado à estimativa individual do tempo de reinício de ciclo de oscilação é o intervalo temporal entre um quadro e outro do vídeo analisado, a saber, de $\Delta t = 1/30 \text{ s} = 0,03 \text{ s}$. Desse modo, dentro do erro experimental de estimativa de reinício de cada ciclo, pode-se concluir que amplitudes inferiores a 8° produzem oscilações de mesmo período (ótima oportunidade para explorar com os estudantes que a igualdade experimental abrange um intervalo de valores na reta de números reais, diferentemente da igualdade matemática onde exige-se equivalência rígida de dois números reais). Ainda, com amplitude de 14° há igualdade de período nas duas primeiras oscilações completas em relação ao tempo de oscilação de 11° , uma vez que a diferença observada está dentro da incerteza na determinação da posição de reinício de ciclo. Mesmo com 30° há isocronia (dentro da precisão experimental) com a amplitude de 14° para os dois

primeiros ciclos de oscilação, muito embora já o primeiro período da oscilação de 14° já esteja no limite de equivalência aos dados de amplitude menor.

Tabela 1: Tempo de término de cada ciclo de oscilação do pêndulo simples, conforme trajetórias automáticas geradas pelo Tracker (software livre disponível em <https://physlets.org/tracker/>). O comprimento foi mantido fixo e igual a $(1,000 \pm 0,002)$ m enquanto os ângulos iniciais de oscilação assumiram os valores indicados na primeira linha da tabela.

	$(3 \pm 1)^\circ$	$(5 \pm 1)^\circ$	$(8 \pm 1)^\circ$	$(11 \pm 1)^\circ$	$(14 \pm 1)^\circ$	$(30 \pm 1)^\circ$
1° ciclo ($\pm 0,03$ s)	1,98	2,00	1,98	2,00	2,03	2,05
2° ciclo ($\pm 0,03$ s)	3,98	4,00	4,00	4,02	4,05	4,08
3° ciclo ($\pm 0,03$ s)	6,00	6,02	6,02	6,03	6,07	6,15
4° ciclo ($\pm 0,03$ s)	8,00	8,02	8,02	8,03	8,10	8,20
5° ciclo ($\pm 0,03$ s)	10,02	10,03	10,03	10,05	10,10	10,23
6° ciclo ($\pm 0,03$ s)	12,02	12,05	12,05	12,07	12,14	12,28
7° ciclo ($\pm 0,03$ s)	14,04	14,05	14,07	14,09	14,15	14,32
8° ciclo ($\pm 0,03$ s)	16,05	16,07	16,07	16,10	16,17	16,37
9° ciclo ($\pm 0,03$ s)	18,06	18,07	18,09	18,12	18,20	18,42
10° ciclo ($\pm 0,03$ s)	20,07	20,09	20,09	20,12	20,22	20,45

Interessante notar que, à medida que o tempo passa e a oscilação acontece, cada amplitude produz um período de oscilação numericamente distinto, muito embora ainda se mantenham todos iguais do ponto de vista experimental. Caso o recorte de tempo de observação fosse aumentado poder-se-ia investigar a dependência entre período e amplitude, uma vez que a metodologia de aquisição de dados permite boa resolução temporal. Essa observação tem, pelo menos, duas consequências reflexivas imediatas: i) podemos acessar a dependência entre período e amplitude, desde que o pêndulo seja observado oscilar por tempo suficiente para que a diferença nos tempos de período supere a resolução temporal experimental (se, de algum modo, for possível eliminar a elipticidade da trajetória oscilante e o amortecimento resultantes de um longo tempo de observação; existem mecanismos de Pêndulo de Foucault capazes de permitir longas observações para amplitudes fixas); ii) utilizar essa evidência para pensar a respeito da qualidade de um método de medida de tempo, de relógios diferentes e sua assincronia: quanto tempo é necessário esperar para que dois relógios estejam defasados em 1 segundo? Pode-se abordar a qualidade (no sentido de defasagem) e o funcionamento dos relógios atômicos atuais. No caso do pêndulo que está sendo estudado, pode-se ver que a partir do sétimo período os dados referentes à trajetória de amplitude de 11° ficam no limite de concordância experimental com os dados da trajetória de amplitude de 8° .

A coluna com amplitude de 30° evidencia inequivocamente a não isocronicidade pendular já a partir de seu segundo ciclo em relação à trajetória de amplitude de 14° - devemos destacar que uma abordagem alternativa para a evidência da não isocronicidade pendular com experimentos de sala de aula, como um exemplo de tratamento de erros experimentais e confiança em dados empíricos, pode ser encontrada em (SILVEIRA, 1986).

Apesar das observações tecidas em relação à possibilidade de evidenciar a assincronia do pêndulo para amplitudes distintas tendo um recorte diferente do tempo de observação da dinâmica, é possível considerar que, dentro do recorte de observação da dinâmica aqui apresentado, para amplitudes inferiores a 10° o pêndulo simples é, de fato, isócrono em relação à amplitude. Conclui-se, portanto, que, para esse recorte, o período poderá ser determinado conhecendo-se apenas seu comprimento, independentemente da amplitude.

Podem-se tecer observações complementares em relação aos dados coletados pelo Tracker nessas trajetórias recortadas e analisadas. Uma delas é que, para o recorte temporal escolhido, fica muito evidente que não há amortecimento experimentalmente resolvido da oscilação para a incerteza adotada na posição da esferinha oscilante ($DI = \pm 0,002m$). Essa observação permite discussões acerca dos limites das conclusões construídas, por exemplo, embora seja sabido existir amortecimento para longos tempos de observação, não é possível afirmar a partir dos dados coletados, que tal amortecimento é, resolutamente, observado pois, dentro da precisão experimental na determinação de posição não há possibilidade de afirmar inequivocamente tal fato. Com isso, pode-se dizer que o recorte feito da realidade torna precisa as afirmações de não existência de amortecimento e da consequente conservação de energia durante a dinâmica.

A Tabela 2 resulta da constatação de possibilidade de *ajuste de uma função seno* aos dados experimentais oriundos das trajetórias automáticas levantadas pelo Tracker. Esse ajuste de uma função matemática a dados experimentais pode ser usado para explorar a multiplicidade de informações que a teoria a ser adotada para descrição do fenômeno deverá ser capaz de descrever. A Tabela 2 foi construída fixando a amplitude de oscilação em $(8 \pm 1)^\circ$ e variando o comprimento do pêndulo simples. Ela contém dados *empíricos* que evidenciam movimento harmônico simples com um período específico para cada comprimento, dados esses a serem obtidos teoricamente para haver consolidação da teoria adotada para descrição desses dados; no caso de concordância entre teoria e dados experimentais haverá então a compreensão de que a teoria adotada é contenedora de algum grau de compreensão da natureza.

Tabela 2: Para ângulo inicial fixo, $(8 \pm 1)^\circ$, a trajetória da partícula oscilante foi automaticamente determinada pelo Tracker e as expressões de ajuste, também fornecidas pelo software a partir de uma função tentativa preestabelecida pelo usuário, permitem estimar o período de oscilação.

Comprimento ($\pm 0,002$ m)	Função de ajuste à trajetória experimental*	Período ($\pm 0,03$ s)
1,000	$x(t) = 0,094 \text{ sen}(3,127 t - 1,529)$	2,01
0,900	$x(t) = 0,087 \text{ sen}(3,301 t - 1,575)$	1,90
0,800	$x(t) = 0,073 \text{ sen}(3,498 t - 1,514)$	1,80
0,700	$x(t) = 0,068 \text{ sen}(3,740 t - 1,582)$	1,68
0,600	$x(t) = 0,059 \text{ sen}(4,042 t - 1,483)$	1,55
0,500	$x(t) = 0,048 \text{ sen}(4,421 t - 1,533)$	1,42
0,400	$x(t) = 0,040 \text{ sen}(4,950 t - 1,529)$	1,27
0,300	$x(t) = 0,030 \text{ sen}(5,719 t - 1,550)$	1,10
0,200	$x(t) = 0,021 \text{ sen}(7,010 t - 1,492)$	0,90
0,100	$x(t) = 0,011 \text{ sen}(9,855 t - 1,406)$	0,64

* x dado em metros ($\pm 0,002$ m) e t dado em segundos ($\pm 0,03$ s).

Diferentemente da forma gráfica comumente utilizada para visualização de correlação entre variáveis, mostra-se na Tabela 3 um método de correlacionar grandezas via tentativa e erro. Nota-se que, também dentro da precisão experimental, empiricamente o período e a amplitude obedecem à relação

$$T^2 = \left[(4,03 \pm 0,01) \frac{s^2}{m} \right] \cdot l \quad (1)$$

com erro no valor da constante que correlaciona T^2 e l sendo estimado pelo desvio padrão dos valores gerados independentemente e apresentados na última coluna da Tabela 3.

A construção da equação empírica relacionando período e comprimento, equação (1), bem como os dados apresentados na Tabela 2, motivam a busca de explicações desses dados, explicações essas que os incorporem como consequências de compreensão do funcionamento da natureza. Essa busca é o objeto da próxima seção.

Tabela 3: Apresentação de tentativas de determinação de expressão empírica que relaciona o período e o comprimento para as medidas efetuadas. (Os erros foram estimados por propagação daqueles cometidos na determinação do período e do comprimento (PIACENTINI *et al*, 2015).)

$T (\pm 0,03 \text{ s})$	$l (\pm 0,002 \text{ m})$	$T/l \text{ (s/m)}$	$T/l^2 \text{ (s/m}^2\text{)}$	$T^2/l \text{ (s}^2\text{/m)}$
2,01	1,000	2,01±0,03	2,01±0,04	4,03±0,13
1,90	0,900	2,11±0,04	2,35±0,05	4,03±0,14
1,80	0,800	2,25±0,04	2,81±0,06	4,05±0,15
1,68	0,700	2,40±0,05	3,43±0,08	4,04±0,16
1,55	0,600	2,59±0,06	4,31±0,11	4,01±0,17
1,42	0,500	2,84±0,07	5,68±0,17	4,03±0,19
1,27	0,400	3,17±0,09	7,93±0,27	4,02±0,21
1,10	0,300	3,66±0,12	12,21±0,50	4,02±0,25
0,90	0,200	4,48±0,19	22,4±1,2	4,01±0,31
0,64	0,100	6,36±0,43	63,6±5,5	4,04±0,46

3 ABORDAGEM TEÓRICA AO PÊNULO SIMPLES

Após o resultado da seção anterior ter sido estabelecido de modo empírico, reproduzível e inegável dentro do recorte de realidade que ele representa, para avançar em compreensão é preciso buscar uma explicação para tais resultados. Em busca dessa explicação teórica aplicamos a Segunda Lei do movimento de Newton. A Figura 2 contém as informações que precisamos para aplicar essa lei. Dela, juntamente à Segunda Lei, detraímos que as componentes x (direção horizontal com sentido positivo para direita) e y (direção vertical com sentido positivo para cima) do movimento da massa m devem ser dadas por:

$$-T_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

$$T_y - P = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad (3)$$

sendo T_x e T_y as componentes x e y , respectivamente, da tensão exercida pelo fio sobre a massa e P o módulo da força peso. As componentes da tensão, por sua vez, podem ser reescritas em termos do módulo da tensão T do fio e do ângulo de deflexão do fio (θ) em relação à posição de repouso (vertical):

$$T_x = T \sin \theta$$

$$T_y = T \cos \theta.$$

Substituindo essas expressões nas equações (2) e (3) obtemos

$$-T \operatorname{sen} \theta = ml \frac{d^2}{dt^2} (\operatorname{sen} \theta) \quad (4)$$

$$T \cos \theta - P = ml \frac{d^2}{dt^2} (\cos \theta) \quad (5)$$

onde utilizou-se que $x = l \operatorname{sen} q$ e $y = l \cos q$ quando a origem do sistema coordenado é escolhida coincidente com o ponto de suspensão do pêndulo simples.

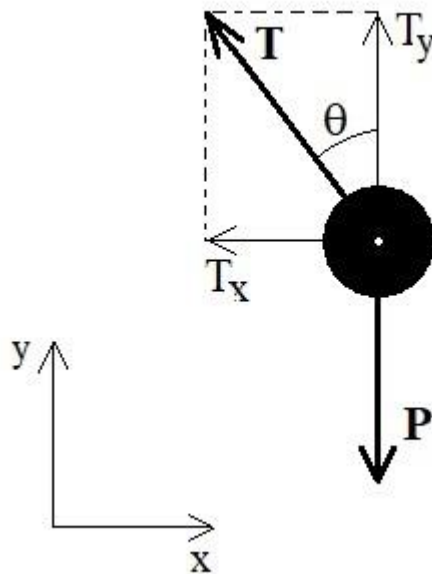


Figura 2: Diagrama de forças sobre a massa oscilante: T a tensão no fio, com suas respectivas componentes T_x e T_y , conforme sistema coordenado indicado no canto inferior esquerdo da figura, e P , o peso da esfera oscilante.

Seja notado que as equações (4) e (5) são equações diferenciais não-lineares acopladas nas incógnitas T e q , ambas funções do tempo.

Nesse momento da análise entra a aproximação matemática da teoria, aproximação essa justificada por adaptar-se ao recorte de realidade que fizemos do sistema.

A equação empírica obtida na seção anterior é válida apenas para pequenas amplitudes, sendo o ‘pequeno’ quantificado por $q \leq 10^\circ$. Nesse caso, com o ângulo q expresso em radianos (a unidade natural de medida de ângulos), valem as aproximações:

$$\cos \theta \simeq 1$$

$$\operatorname{sen} \theta \simeq \theta$$

e, com elas, é possível reescrever as equações de movimento (4) e (5) como

$$-T \theta \simeq ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (6)$$

$$T - P \simeq 0. \quad (7)$$

A equação (7) implica que

$$T \simeq mg \quad (8)$$

onde foi usado o fato de que a força peso é dada, em módulo, por $P=mg$. Cabe explorar o significado físico dessa igualdade: a força exercida pelo fio sobre a massa durante as oscilações de pequena amplitude é igual ao próprio peso da massa suspensa, o que é intuitivo e que, nessa abordagem, resulta da aplicação da lei de movimento.

O resultado expresso na equação (8), por sua vez, permite reescrever a equação (6) conforme segue

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta \simeq 0$$

que trata-se de uma equação diferencial linear de segunda ordem cuja solução é dada por

$$\theta(t) = \theta_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$$

sendo θ_0 e ϕ constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais do movimento e

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Se usarmos que $x=l \text{ sen } q$, lembrando que em nosso recorte temos $\text{sen } q \approx q$, obtemos

$$x(t) \simeq l\theta_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$$

que corresponde, precisamente, à função que foi ajustada aos dados experimentais da seção anterior (ver Tabela 2). Ou seja: a dependência temporal da posição horizontal obtida experimentalmente foi explicada a partir de uma hipótese geral. Essa hipótese geral, a Segunda Lei de Newton, permite investigar situações, por extrapolação, que não estão necessariamente restritas ao recorte que demos ao fenômeno escolhido como objeto de investigação. Claro que essas investigações deverão ser comparadas com os dados experimentais resultantes das mesmas condições que a teoria permite extrapolar, por consistência lógica. O destaque a ser dado é que, quando se sabe a causa do movimento, abre-se a possibilidade de investigar além do recorte inicial que serviu de confirmação, ou validação, da teoria. Trata-se de um bom momento para estabelecer a diferença entre *teoria* e *modelo* e explicitar a complementaridade de ambos no processo de compreensão da natureza.

Na equação (10), a função seno é periódica. Isso significa que, após um arco de ângulo igual a 2π radianos, o movimento passará a repetir-se. Essa observação permite evidenciar uma expressão teórica para o período T do pêndulo simples:

$$x(t + T) = x(t)$$

$$l\theta_0 \text{sen}[\omega(t + T) + \phi] = l\theta_0 \text{sen}[\omega t + \phi]$$

$$\Rightarrow \omega T = 2\pi$$

de modo que, usando a equação (9), pode-se escrever

$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{g} \quad . \quad l$$

que, por sua vez, quando comparada com a equação empírica (1), permite identificar claramente a constante empírica, lá evidenciada, com a constante teórica associada à aceleração de queda livre g , ou seja:

$$\frac{4\pi^2}{g} = 4,03 \text{ s}^2/\text{m} \quad \Rightarrow \quad g \simeq 9,80 \text{ m/s}^2.$$

A constante empírica do resultado expresso pela equação (1) tornou-se, agora, uma constante teórica referente à interação entre corpos com massa, a saber, a aceleração gravitacional g . Um próximo passo investigativo seria perguntar-se a respeito dessa nova constante, as razões que levam ela a ter esse valor. Eventualmente, nessa busca por explicar o valor de g , novas constantes teóricas apareceriam – a Lei da Gravitação Universal, também devida a Newton, permite obter o valor de g em termos da massa e do raio da Terra, deixando a constante de gravitação universal, usualmente simbolizada por G , como a nova constante teórica que necessita de investigações. E, assim, nossa capacidade de prever o comportamento do mundo sob determinadas condições vai aumentando, porém, ao mesmo tempo fica evidente o limite de onde se encontra nossa compreensão por meio das constantes teóricas. Desse exemplo espera-se gerar a compreensão, difícil de explicar em sala de aula, de que a ciência é um constructo de compreensão em contínua expansão e que existem limitações naquilo que dizemos ser cientificamente comprovado (os recortes de realidade).

Esse processo empírico-teórico de compreensão é bastante interessante. A história da ciência contém exemplos de resultados empíricos que levaram a desenvolvimentos teóricos. Para citar alguns: as expressões empíricas para representação dos vários comprimentos de onda do espectro de hidrogênio – que foram explicadas pela Mecânica Quântica, as Leis (empíricas) de Kepler – que foram obtidas da Gravitação Universal e as propriedades periódicas dos elementos da Tabela Periódica – entendidos também pela Mecânica Quântica. Por outro lado, ainda carecem de investigações inúmeros coeficientes empíricos de correlação, como o coeficiente de atrito (Física Básica) e as constantes de velocidade atreladas às equações

cinéticas das reações químicas (Cinética Química), apenas para citar dois exemplos pertinentes às áreas da Física e da Química, respectivamente.

Esses exemplos precisam ser citados, mesmo após o desenvolvimento dado no estudo do pêndulo, para tornar evidente que uma regra empírica que correlaciona grandezas, embora não seja desprovida de uma fundamentação que lhe justifique, pode ser construída por qualquer que se proponha a investigar um dado fenômeno. Não é possível construir uma regra geral a partir de um caso particular, mas é possível, sim, subsidiar o constructo de uma regra geral a partir de uma grande quantidade de casos particulares, sendo cada caso particular importante para o estabelecimento de uma lei, ou regra, geral.

Essas constatações devem desmotivar a parcialidade na escolha de um dado método de abordar um conteúdo no âmbito de sala de aula. A consciência de que os avanços científicos e tecnológicos acontecem de modo mais ágil quando as metodologias investigativas atuam em simultaneidade, em pé de igualdade e não como concorrentes de méritos, é um dos ingredientes para a construção de um ambiente acadêmico mais compreensivo, colaborativo e efetivo, seja em ensino, pesquisa ou extensão.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O pêndulo simples tem mostrado ser um objeto de estudo bastante usado em ensino de física e muito pouco explorado em seu potencial de fornecer significado a termos científicos necessários como, por exemplo, reprodutibilidade, incertezas em processos de medida, expressões empíricas e suas, caso existam, explicações teóricas. A compreensão desses termos leva, naturalmente, a um ponto de vista mais crítico em relação ao que é conhecido bem como às formas de apresentação de conclusões ditas cientificamente comprovadas.

A exposição conceitual de compreensões modernas da natureza, em palavras ou imagens, é abundante nos meios de divulgação de informação atualmente disponíveis a praticamente toda a população. Desse modo, a exposição da capacidade investigativa adotada pela ciência, bem como da possibilidade de fazer e convencer a si mesmo de resultados já bem estabelecidos, devem ser estimulados desde os primeiros anos de exposição à educação, independentemente do nível de formação do estudante (ou, porque não dizer, do profissional). Pensamos que o fazer científico explicado passo-a-passo deve ser estimulado e propagado uma vez que pode ter como consequência a alavancagem de uma cultura educada criticamente a respeito das informações que propaga e daquilo que vem a acreditar ou pensar ser cientificamente comprovado.

É evidente que o próprio experimento aqui divulgado tem suas fragilidades a serem consideradas. Uma delas é que, embora tenhamos falado de reprodutibilidade, não fizemos amostragem de repetições de vídeos com parâmetros fixos para abordar conceitos como desvio padrão e erros aleatórios. Mesmo assim, pensamos ser de relevância notar que, bastando a capacidade de controlar *razoavelmente* um experimento, pode-se tirar conclusões válidas sem demanda de excessivo tempo de trabalho para isso. O conceito de *razoabilidade* ficando estabelecido pelo avanço de compreensão e precisão de dados coletados.

Por fim, esperamos contribuir para explicitar que as idealizações da realidade são construtos teóricos (necessários) feitos pelo investigador e adaptados aos seus interesses momentâneos. Embora não exista movimento sem atrito, se a precisão experimental do recorte de realidade que fazemos não acessa o amortecimento por atrito, será que é logicamente aceitável perguntar-se a respeito de sua existência? Nosso limite investigativo torna-se igual ou inferior à nossa capacidade de determinar e reproduzir inequivocamente uma certa medida, esta, por sua vez, será limitada pelo próprio processo de medida.

REFERÊNCIAS

- Machado, J.; Cruz, S. M. S. C. de S. *Conhecimento, realidade e ensino de física: modelização em uma inspiração bungeana*. Ciência e Educação **17**, 887 (2011).
- Nelson, R. A.; Olsson, M. G. *The pendulum - Rich physics from a simple system*. American Journal of Physics **54**, 112 (1986).
- Carvalhoes, C. G.; Suppes, P. *O cálculo de alta precisão do período do pêndulo simples*. Revista Brasileira de Ensino de Física **31**, 2701 (2009).
- Lopes, F. S.; Suave, R. N.; Nogueira, J. A. *Uma revisão das aproximações lineares para grandes amplitudes de oscilação do período de um pêndulo simples*. Revista Brasileira de Ensino de Física **40**, e3313 (2018).
- Suave, R. N.; Nogueira, J. A. *Uma discussão sobre as aproximações na determinação do período máximo de um pêndulo simples*. Revista Brasileira de Ensino de Física **38**, e2501 (2016).
- Silveira, F. L. da; Ostermann, F. *A insustentabilidade da proposta indutivista de "descobrir a lei a partir de resultados experimentais"*. Caderno Brasileiro de Ensino de Física **19** (número especial), 7 (2002).

Matthews, M. *Metodologia e política em ciência: o destino da proposta de Huygens de 1673*

para adoção do pêndulo de segundos como um padrão internacional de comprimento e algumas sugestões educacionais. Caderno Catarinense de Ensino de Física **18**, 7 (2001).

Kuhn, T. S. *A estrutura das revoluções científicas*. 5 ed. Editora Perspectiva (1998).

Tracker. Disponível em: <<https://physlets.org/tracker/>>. Acesso em: 11 de Julho de 2019.

Bonventi Jr., W.; Aranha, N. *Estudo das oscilações amortecidas de um pêndulo físico com o auxílio do “Tracker”*. Revista Brasileira de Ensino de Física **37**, 2504 (2015).

Bezerra Jr., A. G.; Oliveira, L. P. de; Lenz, J. A.; Saavedra, N. *Videoanálise com o software livre Tracker no laboratório didático de Física: movimento parabólico e segunda lei de Newton*. Caderno Brasileiro de Ensino de Física **29**, Número Especial 1, 469 (2012).

Silveira, F. L. da. *Estudo empírico da relação entre o período e a amplitude de um pêndulo simples*. Caderno Catarinense de Ensino de Física **3**, 134 (1986).

Piacentini, J. J.; Grandi, B. C. S.; Hofmann, M. P.; Lima, F. R. R. de; Zimmermann, E. *Introdução ao Laboratório de Física*. 5 ed. Editora da UFSC (2015).