

O pêndulo simples em regime não linear: uma análise com funções elípticas de Jacobi e integrais elípticas

The simple pendulum in nonlinear regime: an analysis with Jacobi elliptic functions and elliptic integrals

DOI:10.34117/bjdv7n10-111

Recebimento dos originais: 07/09/2021

Aceitação para publicação: 11/10/2021

André Rick Gonçalves Dias

Pós-graduando em Estruturas de Concreto e Fundações
Faculdade de Tecnologia de Curitiba, FATEC-PR
Travessa da Lapa, nº 135, Centro – São Luís/MA
eng.andregdias@gmail.com

Thiago Prudêncio de Oliveira

Doutor em Física, Professor Adjunto do Curso Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia
Universidade Federal do Maranhão – UFMA, Campus São Luís
Avenida dos Portugueses, 1966, Vila Bacanga – São Luís/MA – UFMA - Coordenação
do Curso de Ciência e Tecnologia – CCCT
prudencio.thiago@ufma.br

RESUMO

O pêndulo simples aparece em cursos introdutórios de Física com uma abordagem linear, e é considerado como um oscilador harmônico simples. Neste trabalho busca-se por um aprofundamento no tema, analisando o comportamento oscilatório desse sistema em regime não linear, fazendo uso de integrais elípticas, funções elípticas de Jacobi e recursos computacionais. Desenvolveu-se a equação que modela o pêndulo simples não amortecido para encontrar a expressão que descreve o período de oscilação em termos da integral elíptica completa de primeira espécie $K(k)$, onde o cálculo desta se dá através da implementação de um algoritmo computacional, possibilitando encontrar resultados para o período e sua posterior análise para vários valores da amplitude inicial, além da solução exata da equação que modela o pêndulo simples em termos da função elíptica de Jacobi $sn(u, k)$.

Palavras-chave: Pêndulo simples, Regime não linear, Integrais elípticas, Funções elípticas de Jacobi, Recursos computacionais.

ABSTRACT

The simple pendulum appears in introductory Physics courses with a linear approach, and is considered as a simple harmonic oscillator. In this work we search for a deepening in the subject, analyzing the oscillatory behavior of this system in a nonlinear regime, making use of elliptic integrals, Jacobi elliptic functions and computational resources. The equation that models the non-damped simple pendulum has been developed to find the expression that describes the period of oscillation in terms of the complete elliptic integral of the first species $K(k)$, where the calculation of this occurs through the implementation of a computational algorithm, allowing the finding of results for the period and its subsequent analysis for several values of initial amplitude, in addition to

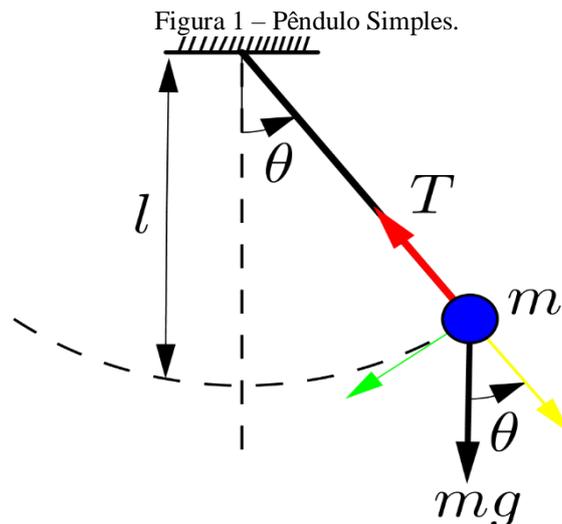
the exact solution of the equation that models the simple pendulum in terms of the elliptic function of Jacobi $sn(u, k)$.

Keywords: Simple pendulum, Nonlinear regime, Elliptic integrals, Jacobi's elliptic functions, Computational resources.

1 INTRODUÇÃO

O pêndulo simples, figura 1, é um dos sistemas oscilatórios não lineares mais simples. Devido a isso, também é um dos mais estudados e mais populares entre os sistemas não lineares. Ele é constituído por uma massa m suspensa por um fio inextensível de comprimento l , onde a massa do fio é desprezível.

A massa m se move em um plano vertical sob a ação da força peso mg e da tensão com o fio T . Quando se afasta a massa m do repouso e a solta, ela começa a oscilar em torno da sua posição de equilíbrio.



A força peso pode ser decomposta em suas componentes tangencial (em verde) e radial (em amarelo). A componente radial ($mg \cos \theta$) se anula com a tensão do fio, fazendo com que a componente tangencial ($mg \sin \theta$) seja a causadora do movimento oscilatório, que faz com que a massa tenda a retornar a sua posição de equilíbrio. Ela também é conhecida como força restauradora, e assim:

$$F(\theta) = - mg \sin \theta. \quad (1)$$

Nota-se que para a posição de equilíbrio, $\theta = 0$, a tensão se cancela completamente com a força peso, enquanto para as duas posições angulares simétricas θ_1 e $-\theta_1$, têm-se forças sem sentidos de inversão na direção tangencial, de mesmo módulo, isto é $F(\theta_1) = -F(-\theta_1)$.

Pode-se concluir que o movimento de um pêndulo simples não descreve de modo geral um Movimento Harmônico Simples (MHS), pois a força que encontrada é proporcional ao seno da elongação e não a própria elongação. Portanto, o seno do ângulo é o termo responsável pela não linearidade do pêndulo simples.

Porém, sabe-se que o movimento periódico realizado pelo pêndulo simples é harmônico apenas para pequenos desvios da posição de equilíbrio, ou seja, para oscilações de pequenos ângulos, onde se tem $\sin \theta \approx \theta$.

2 INTEGRAIS ELÍPTICAS E FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI

As integrais elípticas são definidas, de modo geral, por meio de relações integrais do tipo:

$$\int \frac{F(y)}{\sqrt{P(y)}} dy \quad (2)$$

onde $F(y)$ é uma função racional e $P(y)$ é um polinômio do terceiro ou quarto grau. Se $P(y)$ fosse de primeiro ou segundo grau se teria uma integral elementar do cálculo integral. Em 1655 houve o primeiro relato sobre integrais elípticas (SIMÃO, 2013, p.19), quando John Wallis (1616-1703) começou a estudar o comprimento do arco de uma elipse. Essa teoria foi ainda desenvolvida por grandes nomes da matemática como Leonhard Euler (1707-1783), mas foi Adrien Marie Legendre (1752-1833) que contribuiu vastamente para o desenvolvimento das integrais elípticas.

O trabalho de Legendre é considerado como a base da teoria das integrais elípticas. Legendre teve grande importância no estudo destas integrais, principalmente, por reduzir integrais do tipo da equação (2) em três formas canônicas (SIMÃO, 2013, p.14), de primeira, segunda e terceira espécie. Ele também percebeu que essas integrais não podem ser reduzidas a integrais elementares comumente conhecidas do cálculo integral, e que são calculadas numericamente (SILVA, 2013, p.16). As reduções são encontradas em Piedade (1875).

A integral elíptica de primeira espécie aparece naturalmente na resolução da equação diferencial do movimento de um pêndulo simples (BOYER, 1974, p.358), já a de segunda espécie quando se calcula o comprimento de arco da elipse. Essas duas funções têm sido utilizadas frequentemente em cálculos envolvendo equações diferenciais não lineares (FILHO e VASCONCELOS, 1993, p.2). São definidas trigonometricamente por:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi}} \quad (3)$$

e

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi} d\varphi, \quad (4)$$

respectivamente de primeira e segunda espécie. Onde k é o módulo, que se identifica com a excentricidade de uma dada elipse, e φ é a amplitude. As equações (3) e (4) são limitadas por $0 \leq k \leq 1$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Quando a amplitude é igual a $\frac{\pi}{2}$, tem-se a integral elíptica completa de primeira espécie (BAKER, 1890, p.24), que é definida por:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi}}, \quad (5)$$

que será usada neste artigo para o cálculo do período do pêndulo simples e a sua solução exata.

De Kovacic e Brennan (2011, p.133) tem-se uma expansão em série dessa integral,

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \frac{25}{256}k^6 + \dots \right). \quad (6)$$

Aproveitando o trabalho de Legendre, Niels Henrik Abel (1802-1829) e Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) estudaram concomitantemente as integrais elípticas e viram que invertendo a relação funcional das variáveis nessas integrais era obtida uma

nova função, ou seja, pelas funções inversas das integrais elípticas chegavam a uma função.

Jacobi introduziu a notação utilizada atualmente para essas funções e chamou de funções elípticas somente as inversões das integrais elípticas completas de primeira espécie (SILVA, 2013, p.18).

As três funções elípticas de Jacobi mais conhecidas são: $sn(u, k)$, $cn(u, k) = \sqrt{1 - sn^2(u, k)}$ e $dn(u, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u, k)}$, onde u é o argumento que determina o comprimento de arco de uma elipse. As funções sn e cn (lê-se: senoidal e cnoidal) são os correspondentes elípticos das funções seno e cosseno. Já dn (lê-se: dnoidal) surge porque o raio em uma elipse não é constante, essa função é igual a 1 para uma circunferência. Têm-se ainda que $sn(-u, k) = -sn(u, k)$, $cn(-u, k) = cn(u, k)$ e $dn(-u, k) = dn(u, k)$.

As inversões das integrais em funções elípticas, trouxeram a possibilidade de uma teoria análoga a das funções trigonométricas. E, assim como as funções trigonométricas, as funções elípticas de Jacobi são periódicas, mas apresentando um duplo período (um real e outro imaginário). No campo real, a função dn possui período igual a $2K$, enquanto que as funções sn e cn possuem período igual a $4K$. As funções elípticas de Jacobi se diferem, ainda, no fato de que seu período não é um número absoluto, porque o valor assumido por K depende do valor do módulo, isto é, da excentricidade da elipse.

As funções elípticas de Jacobi são muito importantes na resolução de equações diferenciais não lineares, como o caso do pêndulo simples em regime não linear, que é tratado neste artigo, onde se fez uso da função $sn(u, k)$.

3 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO PÊNDULO SIMPLES

Seguindo Beléndez et al. (2007), aplica-se a segunda lei de Newton a esse sistema físico e é obtida a seguinte equação diferencial, que descreve a aceleração angular do pêndulo em função do tempo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \text{sen } \theta = 0. \quad (7)$$

Esta é a equação que modela o pêndulo simples não amortecido. Onde θ é o deslocamento angular, t é o tempo e ω_0 é definido a partir do período de oscilação em regime linear, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, onde g é a aceleração da gravidade e l o comprimento do fio.

As condições iniciais tomadas para as oscilações do pêndulo são: o deslocamento angular inicial diferente de zero e a velocidade angular inicial nula, ou seja, $\theta(0) = \theta_0$ e $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = 0$, sendo θ_0 a amplitude angular inicial de oscilação. O sistema oscila entre limites simétricos $[-\theta_0, +\theta_0]$. A velocidade angular $\omega = \omega(t)$ será então obtida, e poderá ser visto que diferente do caso linear, ela em geral dependerá da amplitude θ_0 , assim como a solução periódica $\theta(t)$ da equação (7).

Multiplicando a equação (7) por $\frac{d\theta}{dt}$ e a integrando,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \omega_0^2 \cos \theta = cte, \quad (8)$$

tem-se então uma quantidade conservada, constante de integração, que depende das condições iniciais. E assim, $cte = -\omega_0^2 \cos \theta_0$. Substituindo na equação (8) e usando a relação trigonométrica $\cos \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4 \omega_0^2 \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (9)$$

onde se definem as variáveis $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $k = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$, com $y \in [-1,1]$, $k \in [0,1]$.

Então se obtém o valor de $\frac{d\theta}{dt}$ em função de $\frac{dy}{dt}$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (10)$$

O resultado dessa diferenciação elevada ao quadrado e em termos de y é igual a:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \frac{4}{1-y^2}. \quad (11)$$

Substituindo os valores de y , k e a equação (11) na equação (9),

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 k \left(1 - \frac{y^2}{k}\right) (1 - y^2). \quad (12)$$

Novamente se definem novas variáveis, $\xi(t) = \omega_0 t$ e $z(t) = \frac{y}{\sqrt{k}}$. Onde $dt = \frac{d\xi}{\omega_0}$ e $dy = \sqrt{k} dz$, e ainda, $z(0) = 1$ e $\left(\frac{dz}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0$. Feita as devidas substituições, a equação (12) resolvida para $d\xi$ se torna:

$$d\xi = \pm \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}}. \quad (13)$$

Integrando ambos os membros

$$\xi = \pm \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}} \mp \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}}. \quad (14)$$

Essas são as integrais elípticas de primeira espécie em forma algébrica (cartesiana). Obtém-se então ξ em função de z e k como

$$\xi = \pm [F(z(0), k) - F(z, k)]. \quad (15)$$

Fazendo a substituição de variáveis $z = \text{sen } \varphi$ na primeira integral é obtida a integral elíptica completa de primeira espécie, $K(k)$, logo

$$\xi = \pm [K(k) - F(z, k)]. \quad (16)$$

4 PERÍODO DO PÊNULO SIMPLES

Considerando a posição angular inicial, com relação à posição de equilíbrio, tem-se que o período de oscilação τ é quatro vezes o tempo tomado pelo pêndulo para oscilar de $\theta = 0$ ($z = 0$) para $\theta = \theta_0$ ($z = 1$), e como $\xi = \omega_0 t$, então

$$\tau = 4 t = \frac{4}{\omega_0} \xi, \quad (17)$$

e a seguinte expressão pode ser obtida

$$\tau = \pm \frac{4}{\omega_0} [K(k) - F(z(\xi), k)]. \quad (18)$$

Como $\theta = 0 \rightarrow z(\xi) = 0$, fica clara a exclusão do subtraendo da expressão em colchetes na equação (18). E pela proposição de Meyer (2001, p.7), que define K como uma função analítica real positiva de k para $-1 < k < 1$, pode-se obter

$$\tau = \frac{4}{\omega_0} K(k) = \frac{2}{\pi} \tau_0 K(k), \quad (19)$$

onde

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (20)$$

em que τ_0 é o período do pêndulo para pequenos ângulos. Quando $K(k) = \frac{\pi}{2}$, tem-se uma aproximação linear, pois $\tau = \tau_0$. Substituindo a equação (20) em (19), tem-se a expressão final

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k). \quad (21)$$

Usando a expansão de K da equação (6), o período se torna

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{256} k^6 + \dots \right). \quad (22)$$

5 SOLUÇÃO EXATA

Da equação (14), tem-se que:

$$F(z, k) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}}. \quad (23)$$

Fazendo a mudança de variável $z = \operatorname{sen} \varphi$, onde $\varphi = \operatorname{arcsen} z$ e $dz = \cos \varphi d\varphi$, e para $z = 0$, onde $\varphi(0) = \operatorname{arcsen} 0 = 0$, pode-se reescrever

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi=\operatorname{arcsen} z} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2 \varphi)(1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}} d\varphi, \quad (24)$$

que agora depende de uma posição angular φ . Pela relação fundamental da trigonometria, $\cos^2 \varphi = 1 - \operatorname{sen}^2 \varphi$. Evidenciando $\cos \varphi$ da raiz e cancelando com o do numerador, chega-se a uma forma simplificada

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \quad (25)$$

ou ainda $F[\operatorname{arcsen}(z), k]$. Substituindo na equação (16),

$$\xi = K(k) - F[\operatorname{arcsen}(z), k], \quad (26)$$

e assim

$$F[\operatorname{arcsen}(z), k] = K(k) - \xi. \quad (27)$$

Escrevendo em termos da função elíptica de Jacobi sn ,

$$z = sn [K(k) - \xi, k]. \quad (28)$$

Reescrevendo em termos das variáveis originais,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \operatorname{sn}\left[K\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) - \omega_0 t, \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]. \quad (29)$$

Expressando θ em função de t , chega-se à posição angular para qualquer amplitude inicial em função do tempo, dadas as condições iniciais,

$$\theta(t) = 2 \operatorname{arcsen}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \operatorname{sn}\left[K\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) - \omega_0 t, \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]\right\}, \quad (30)$$

que é o deslocamento angular exato em função de $\omega_0 t$ para diferentes valores da amplitude de oscilação. Pode-se também escrever

$$\theta(t) = 2 \operatorname{arcsen}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \operatorname{sn}\left[K\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) - t \sqrt{\frac{g}{l}}, \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]\right\}. \quad (31)$$

Já a velocidade angular em função de θ_0 é definida por

$$\frac{2\pi}{\omega(\theta_0)} = \frac{4}{\omega_0} K(k), \quad (32)$$

então,

$$\omega(\theta_0) = \frac{\pi \omega_0}{2 K\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)} \quad (33)$$

ou

$$\omega(\theta_0) = \frac{\pi \sqrt{\frac{g}{l}}}{2 K\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)}. \quad (34)$$

Tem-se assim, de modo geral, a influência de uma dupla periodicidade da função elíptica de Jacobi na posição angular do pêndulo simples para um dado tempo t .

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para o cálculo do período τ pela equação (21) é primeiro necessária uma forma de calcular a integral elíptica completa de primeira espécie $K(k)$. Para tanto, implementou-se um algoritmo em linguagem C, figura 2, usando como embasamento um polinômio encontrado em Hastings (1955, p.172) que reescreve a integral elíptica completa de primeira espécie em forma polinomial,

$$K^*(k) = \{a_0 + a_1\eta + \dots + a_4\eta^4\} + \{b_0 + b_1\eta + \dots + b_4\eta^4\} \ln \frac{1}{\eta}, \quad (35)$$

sendo $\eta = 1 - k^2$. E também por meio de Filho e Vasconcelos (1993, p.10) que criou o subprograma *FELLPK*, que é baseado nessa forma polinomial, em linguagem *FORTRAN*, que calcula os valores de $K(k)$.

Figura 2 – Algoritmo que calcula a integral elíptica completa de primeira espécie.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
float integral_eliptica_completa(float k) {
    float a[5] = {1.38629436112, 0.09666344259, 0.03590092383,
0.03742563713, 0.01451196212};
    float b[5] = {0.5, 0.12498593597, 0.06880248576,
0.03328355346, 0.00441787012};
    float n = 1 - k * k, K = 0;
    int i;
    for (i = 0; i <= 4; i++)
        K += a[i] * pow(n, i) + b[i] * pow(n, i) * log(1/n);
    return K;
}
int main() {
    float k;
    printf("Digite o valor de k:");
    scanf("%f", &k);
    float resultado = integral_eliptica_completa(k);
    printf("Valor de K(k): %f", resultado);
    return 0;
}
```

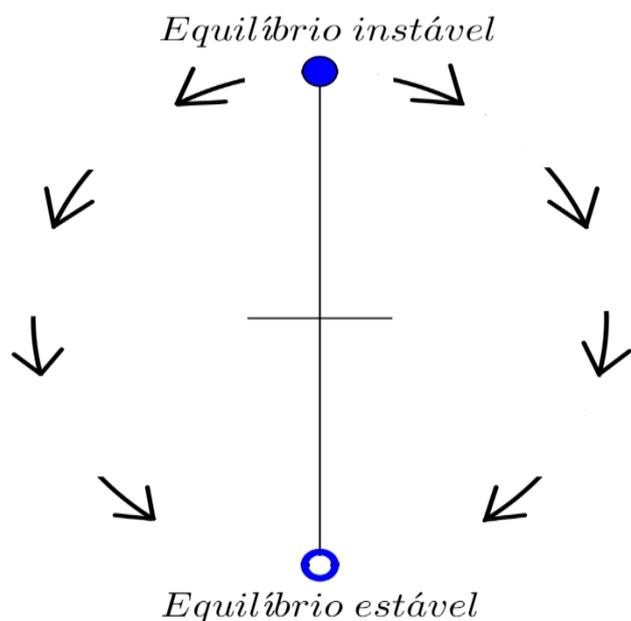
A partir do algoritmo criado torna-se possível determinar o período do pêndulo simples para diferentes amplitudes θ_0 . Para a demonstração dos resultados considerou-se um pêndulo simples com $l = 0,3 \text{ m}$ e $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, os valores obtidos estão no quadro 1.

Quadro 1 – Valores do período τ para diferentes amplitudes.

| $\theta_0(^{\circ})$ | k | $K(k)$ | $\tau (s)$ |
|----------------------|----------|----------|------------|
| 0,5 | 0,000019 | 1,570796 | 1,098767 |
| 1 | 0,000076 | 1,570796 | 1,098767 |
| 2 | 0,000305 | 1,570796 | 1,098767 |
| 3 | 0,000685 | 1,570797 | 1,098768 |
| 4 | 0,001218 | 1,570797 | 1,098768 |
| 5 | 0,001903 | 1,570798 | 1,098768 |
| 6 | 0,002739 | 1,570799 | 1,098769 |
| 7 | 0,003727 | 1,570802 | 1,098771 |
| 8 | 0,004866 | 1,570806 | 1,098774 |
| 9 | 0,006156 | 1,570811 | 1,098778 |
| 10 | 0,007596 | 1,570819 | 1,098783 |
| 20 | 0,030154 | 1,571154 | 1,099018 |
| 30 | 0,066987 | 1,572563 | 1,100003 |
| 40 | 0,116978 | 1,576212 | 1,102556 |
| 50 | 0,178606 | 1,583553 | 1,107691 |
| 60 | 0,25 | 1,596242 | 1,116566 |
| 70 | 0,328990 | 1,616100 | 1,130457 |
| 80 | 0,413176 | 1,645152 | 1,150779 |
| 90 | 0,5 | 1,685750 | 1,179177 |
| 100 | 0,586824 | 1,740788 | 1,217676 |
| 110 | 0,671010 | 1,814078 | 1,268942 |
| 120 | 0,75 | 1,910990 | 1,336732 |
| 130 | 0,821394 | 2,039654 | 1,426732 |
| 140 | 0,883022 | 2,213464 | 1,548311 |
| 150 | 0,933013 | 2,457178 | 1,718789 |
| 160 | 0,969846 | 2,825579 | 1,976484 |
| 170 | 0,992404 | 3,491154 | 2,442052 |
| 180 | 1 | ∞ | ∞ |

Quando $k = 0$, tem-se uma aproximação linear, $\tau = \tau_0$. Já para $k = 1$, $\tau \rightarrow \infty$, pode-se interpretar que o pêndulo permanece em um ponto de equilíbrio instável, figura 3, onde uma perturbação infinitesimal é suficiente para tirar o sistema dessa condição.

Figura 3 – Pêndulo simples em um ponto de equilíbrio instável.



Esse comportamento pode ser considerado quando o pêndulo parte do repouso com um ângulo inicial de 180° , permanecendo no repouso.

Calculou-se também o período do pêndulo para pequenos ângulos τ_0 através da equação (20), obtendo-se o valor de 1,098768 s, que é igual ao encontrado para os ângulos 3, 4 e 5.

A figura 4 compara os valores de τ e τ_0 . Aproximando essa figura pode-se ver que para pequenos ângulos da amplitude de oscilação, $\tau \approx \tau_0$, se verifica um oscilador harmônico simples, figura 5.

Figura 4 – Gráfico comparativo entre períodos (comportamentos linear e não linear).

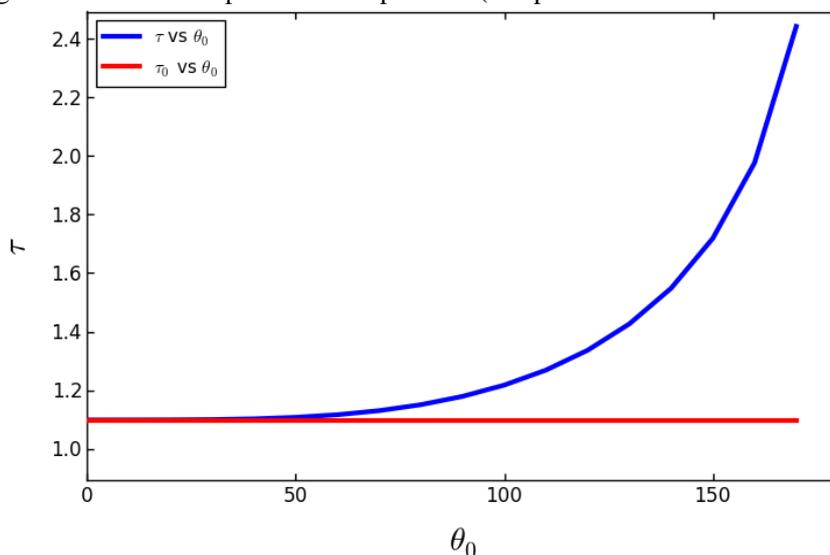
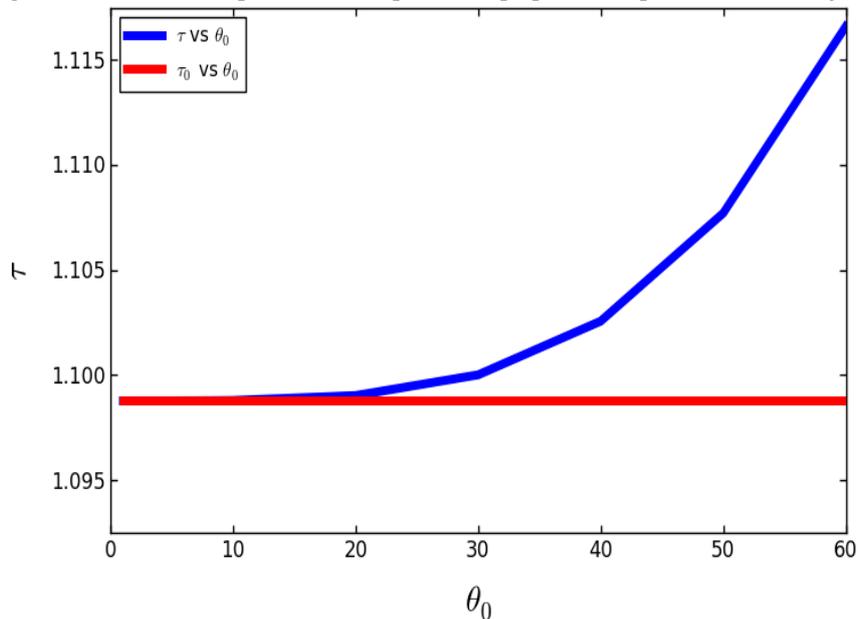
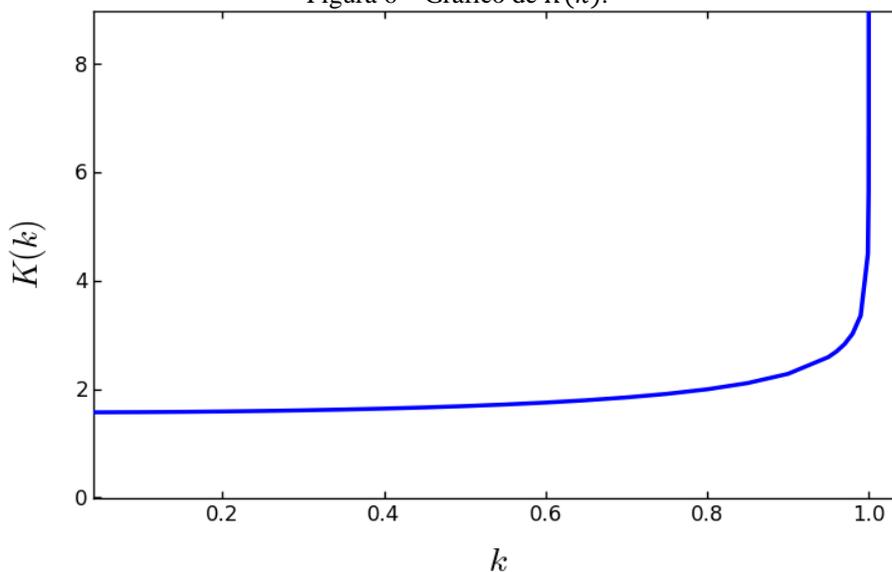


Figura 5 – Gráfico comparativo entre períodos (pequenas amplitudes de oscilação).



Pode-se ainda ver o comportamento da integral elíptica completa de primeira espécie, pela figura 6, sendo $K(0) = \frac{\pi}{2}$ e $K(1) \rightarrow \infty$. Essa abordagem numérica pode ser bastante apropriada para previsões em diversas situações físicas de interesse onde a aproximação linear não é válida.

Figura 6 – Gráfico de $K(k)$.



7 CONCLUSÃO

No movimento harmônico simples, o período de oscilação não depende da amplitude inicial, o que é conhecido como o isocronismo das pequenas oscilações do pêndulo. Diferentemente disto, foi visto que para amplitudes maiores, ou seja, para o

pêndulo em regime não linear, ele deixa de ser isócrono, pois o período passa a depender da amplitude.

O pêndulo é um importante sistema oscilatório para cursos básicos de Física, diante disto, buscou-se a utilização de recursos como o algoritmo aqui implementado para uma análise mais aprofundada do tema, com o uso de integrais elípticas e funções elípticas de Jacobi, permitindo o seu estudo em regime não linear e possibilitando também comparações com resultados experimentais, fortalecendo então, o ensino e estudo de sistemas oscilatórios em um primeiro contato com sistemas não lineares.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem suporte parcial dos Projetos FAPEMA-01401/16 e CNPq-432929/2016-9.

REFERÊNCIAS

BAKER, Arthur L. *Elliptic Functions: An Elementary Text-Book for Students of Mathematics*. New York, John Wiley & Sons; 1890.

BELÉNDEZ, A.; PASCUAL, C.; MÉNDEZ, D. I.; BELÉNDEZ, T.; NEIPP, C. Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. v.29, n.4, p.645-648, 2007.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo; 1974.

FILHO, Aurino Ribeiro; VASCONCELOS, Dionicaldos Soares de. *Reminiscências e Cálculo de Algumas Funções e Integrais Elípticas*. *Revista Matemática Universitária*. n.15, p.20-32, 1993.

HASTINGS JR., C. *Approximations for Digital Computers*. New Jersey, Princeton; 1955.
KOVACIC, Ivana; BRENNAN, Michael J. *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour (Appendix 4AI: Jacobi elliptic function and elliptic integrals)*. Wiley & Sons; 2011.

MEYER, Kenneth R. *Jacobi Elliptic Functions from a Dynamical Systems Point of View*. *The American Mathematical Monthly*. v.108, n.8, p.729-937, 2001.

PIEIDADE, Antonio Zeferino Candido da. *Integraes e Funções Elípticas*. Coimbra, Portugal. *Dissertação de Mestrado*. Universidade de Coimbra; 1875.

SILVA, Priscila Gleden Novaes da. *Funções Elípticas de Jacobi: História e Propriedades*. Maringá, PR. *Dissertação de Mestrado*. Universidade Estadual de Maringá; 2013.

SIMÃO, Cleonice Salateski. *Uma Introdução ao Estudo das Funções Elípticas de Jacobi*. Maringá, PR. *Dissertação de Mestrado*. Universidade Estadual de Maringá; 2013.