Análise das restrições de eliminação de sub-rotas do tipo fluxo de commodities para o problema do caixeiro viajante assimétrico

Analysis of commodity flow type sub-route elimination constraints for the asymmetric traveling salesman problem

DOI:10.34117/bjdv7n6-565

Recebimento dos originais: 07/05/2021
Aceitação para publicação: 01/06/2021

Caroline Sales de Azevedo
Graduanda em Matemática pela Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM
Instituição: Universidade Federal do Triângulo Mineiro- UFTM
Endereço: Av. Randolfo Borges Júnior, 1400 - Univerdecidade, Uberaba - MG, 38064-200
E-mail: carolineazevedo65@gmail.com

Michelli Maldonado
Doutora em Matemática pela Universidade Estadual Paulista - UNESP
Instituição: Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM
Endereço: Av. Randolfo Borges Júnior, 1400 - Univerdecidade, Uberaba - MG, 38064-200
E-mail: michelli.oliveira@uftm.edu.br

RESUMO
O Problema do Caixeiro Viajante é um dos mais estudados na otimização combinatória, assim, diferentes modelos matemáticos para eliminação de possíveis sub-rotas têm sido propostos com o intuito de se resolver conjuntos cada vez maiores de instâncias. Neste trabalho, foram implementadas computacionalmente algumas restrições de eliminação de sub-rotas do tipo fluxo commodities para o Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico, a fim de analisar os seus desempenhos computacionais. Os modelos foram implementados na linguagem de modelagem OPL "*Optimization Programming Language*", utilizando o CPLEX como solver de otimização, sete instâncias do TSBLIB (REINELT,1991) e uma do acervo pessoal das autoras. Diante dos resultados obtidos, notou-se que a EC-MCF foi a formulação de maior qualidade entre as estudadas, no entanto, demandou muito mais tempo para retornar à solução ideal do que as outras. Desta forma, é possível que ao considerar o tempo computacional de algumas formulações, as hierarquias apresentadas por alguns autores se invertam. Sendo assim, é necessário refletir sobre a finalidade do modelo matemático estudado para se determinar o melhor conjunto de restrições para eliminação de sub-rotas.

Palavras-chave: Otimização, Problema do Caixeiro Viajante, Commodity Flow, Eliminação de Sub-rotas.

ABSTRACT
The Traveling Salesman Problem is one of the most studied in combinatorial optimization, thus, different mathematical models for eliminating possible subroutes have been proposed in order to solve increasing sets of instances. In this work, some commodity flow type sub-route elimination constraints for the Asymmetric Traveling

Salesman Problem were computationally implemented in order to analyze their computational performance. The models were implemented in OPL "Optimization Programming Language", using CPLEX as the optimization solver, seven instances of TSBLIB (REINELT,1991) and one from the authors' personal collection. In view of the results obtained, it was noted that the EC-MCF was the formulation with the highest quality among those studied, however, it demanded much more time to return to the ideal solution than the others. Thus, it is possible that when considering the computational time of some formulations, the hierarchies presented by some authors are inverted. Thus, it is necessary to reflect on the purpose of the mathematical model studied in order to determine the best set of constraints for eliminating subroutes.

Keywords: Optimization, Traveling Salesman Problem, Commodity Flow, Subroutes Elimination.

1 INTRODUÇÃO

O Problema de Otimização Combinatória (POC), está presente em diversas situações do cotidiano (FARIAS et al. (2021)). Em virtude à grande complexidade de solução, têm se destacado e atraído pesquisadores de diferentes áreas, que buscam desenvolver algoritmos eficientes para esse tipo de problema, que tem como objetivo minimizar ou maximizar uma função, buscando atribuir valores a um conjunto de variáveis de decisão, considerando para isso um conjunto de restrições.

Um dos problemas mais clássicos de otimização combinatória é o Problema do Caixeiro Viajante (PCV), sua primeira formulação matemática foi apresentada em 1932, por Menger (1932), e desde então tem sido amplamente estudado. A origem do problema está ligada a um caixeiro viajante que pretende viajar por um conjunto de cidades uma única vez e por fim voltar à cidade inicial, percorrendo a menor distância possível.

Inicialmente o problema é modelado como um “problema de designação”, porém a necessidade de mais restrições fica evidente quando há formação de sub-rotas, impossibilitando a resposta de ser aceita como parte da solução ótima, apesar de todas as restrições impostas na definição do PCV serem respeitadas.

Existem diversas propostas de formulações matemáticas para eliminação de sub-rotas, em destaque para Dantzig, Fulkerson e Johnson (1954) e para Miller, Tucker e Zemlin (1960), denominadas nesse trabalho por DFJ e MTZ respectivamente, que são consideradas clássicas para o Problema do Caixeiro Viajante. A eficiência dessas formulações é determinada pela força de sua relaxação linear, deste modo, a que produz o maior valor de relaxamento é considerada como a melhor.

Nos últimos anos, com o intuito de se resolver conjuntos cada vez maiores de instâncias do PCV, diferentes modelos matemáticos para eliminação de sub-rotas têm sido propostos, buscando uma relaxação linear superior aos demais. Com isso, o número de trabalhos na literatura que analisam e comparam tais formulações, tem crescido significativamente.

Desta forma, o presente trabalho objetiva implementar computacionalmente algumas restrições de eliminação de sub-rotas do tipo fluxo commodities para o Problema do Caixeiro Viajante, e verificar a qualidade de cada uma delas, não só do ponto de vista da relaxação linear, mas também do desempenho computacional.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O Problema do Caixeiro Viajante é um dos mais estudados na otimização combinatória, tal notoriedade pode ser justificada por ser um problema NP-Difícil com propriedades importantes para a teoria da complexidade computacional e com diversas aplicações, como na distribuição de encomendas em armazém, cristalografia de raio-X, roteamento de veículos, fiação de computadores, dentre outros (OLIVEIRA, 2015; CONTE, 2002).

De acordo com Oliveira (2015) a origem do PCV "está associada a um caixeiro viajante que pretende passar por um conjunto de cidades uma única vez e por fim voltar à cidade inicial, percorrendo a menor distância possível", ou seja, um caixeiro viajante precisa visitar "n" cidades diferentes, saindo da cidade inicial, passando por todas as demais somente uma vez, e por fim deve retornar à cidade de origem de maneira que o custo dessa rota seja mínimo.

Inicialmente, o modelo matemático do PCV aparenta ser um "problema de designação", que consiste em designar de maneira ótima, cada uma das origens a cada um dos destinos, então de forma preliminar é dado por **(FO)**, **(1)-(3)**:

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad \textbf{(FO)}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = 1, \ \dots, n \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ j = 1, \dots, n \qquad \textbf{(2)}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \forall i, j \qquad \textbf{(3)}$$

O modelo tem como objetivo minimizar o custo do trajeto **(FO)**, assim o parâmetro c_{ij} é o custo de se viajar de i para j, enquanto x_{ij} é a variável de decisão, sendo igual 1 se o caixeiro vai da cidade i para j, e 0 caso contrário. As restrições **(1)** e **(2)** apresentadas são de designação, e embora estejam respeitando o que é definido no Problema do Caixeiro Viajante, ainda não são suficientes para retornar uma solução ótima, pois podem apresentar percursos independentes na solução final, implicando em mais do que uma viagem para o caixeiro. Assim, restrições de eliminação de sub-rotas devem ser acrescidas ao modelo.

Dantzig, Fulkerson e Johnson (1954), apresentam uma das formulações mais clássicas para o Problema do Caixeiro Viajante, onde a seguinte restrição de eliminação de sub-rotas **(4)** do tipo exponencial é implementada a **(FO)**, **(1)-(3)**:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \qquad S \subseteq \{2, \dots, n\}, 2 \leq |S| \leq n - 1 \qquad \textbf{(4)}$$

A restrição impõe que dado um subconjunto de vértices S apenas $|S| - 1$ arcos possam ser escolhidos para solução, apresentado uma sub-rota caso o contrário aconteça. Deste modo, por conta do número elevado de possibilidades as restrições devem ser incluídas de forma dinâmica ao modelo, e apesar de retornar uma boa relaxação linear acaba sendo inviável utilizá-la quando se tem um conjunto extenso de dados.

Já em Miller, Tucker e Zemlin (1960), uma outra formulação considerada clássica é demonstrada, no entanto, esta é da forma polinomial, sendo declarada como:

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n - 2, \qquad i, j = 2, \dots, n \qquad \textbf{(5)}$$

$$1 \leq u_i \leq n - 1, \qquad i = 2, \dots n \qquad \textbf{(6)}$$

Nesse conjunto de restrições, a variável u_i é utilizada para indicar a ordem em que cada vértice i é visitado. Essa formulação é tida como de fácil implementação, devido à suas restrições serem incorporadas a priori no modelo, no entanto possuem uma relaxação linear fraca.

Alguns autores, com a finalidade de melhorar a relaxação linear da MTZ, propuseram inequações mais fortes. Gavish e Graves (1978), por exemplo, apresentaram a formulação do tipo *commodity flow (*LANGEVIN; SOUMIS; DESROSIERS, 1990*)* doravante GG, suas restrições são:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ji} - \sum_{j=2}^{n} g_{ij} = 1, \qquad i = 2, \dots, n \qquad \textbf{(7)}$$

$$0 \leq g_{ij} \leq (n-1)x_{ij}, \qquad i = 1, \dots, n;\ j = 2, \dots, n \qquad \textbf{(8)}$$

Nos modelos com restrições do tipo *commodity flow*, acrescenta-se variáveis que representam o fluxo através dos arcos, e que satisfazem as restrições de conservação. As restrições de Gavish e Graves (1978), apresentadas anteriormente, são do tipo de fluxo de mercadoria única, onde a variável g_{ij} representa o fluxo do vértice 1 para todos os outros vértices, interpretação semelhante à dada para variável u_i da MTZ, sendo assim possível substituir as inequações **(5)** e **(6)** pela equação **(7)** e pela inequação **(8)** (SILVA *et al.*, 2019).

Além do grupo de modelos de fluxo de mercadoria única (*single-commodity flow*), existem os grupos de fluxo de duas mercadorias (*two-commodiy flow*) e o de múltiplas mercadorias (*multi-commodity flow*). De acordo com Oncan *et al*. (2009), o primeiro a formular o Problema do Caixeiro Viajante como um modelo do tipo *multi-commodity flow*, foi Wong (1980) utilizando variáveis adicionais não negativas para descrever o fluxo de diversas mercadorias através dos arcos (i, j) entre os vértices k e l.

Posteriormente, a formulação proposta por Wong (1980) foi generalizada por Claus (1984), que reduziu o número de restrições e de variáveis, assim a variável w_{ij}^k foi utilizada para indicar se o arco (i, j) está na rota entre o vértice k e o vértice de origem. O conjunto de restrições de Claus (1984), denominado nesse trabalho por MCF, é dado por:

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^k - \sum_{j=1}^{n} w_{ji}^k = 0, \qquad i, k = 2, \dots, n; i \neq k \qquad \textbf{(9)}$$

$$\sum_{j=2}^{n} w_{1j}^k - \sum_{j=2}^{n} w_{j1}^k = -1, \qquad k = 2, \dots, n \qquad \textbf{(10)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^i - \sum_{j=1}^{n} w_{ji}^i = 1, \qquad i = 2, \dots, n \qquad \textbf{(11)}$$

$$0 \leq w_{ij}^k \leq x_{ij}, \qquad i, j = 1 \dots, n; \quad k = 2, \dots, n \qquad \textbf{(12)}$$

Onde **(9)** determina que todas as commodities devem ser entregues antes de retornar à cidade inicial, **(10)** indica que se deve passar pelas n cidades e ao final regressar à origem, e **(11)** estabelece que a commodity k é levada somente até a cidade k.

Em Oncan *et al.* (2009) diversas formulações para o PCV são analisadas, e além de destacar as relações desses modelos, também discutem sobre a força das suas relaxações lineares, a fim de determinar uma possível hierarquia entre eles. Os resultados da MCF, são um dos mais satisfatórios, tendo a relaxação linear equivalente à da DFJ, no entanto, não é a formulação que assume o topo da hierarquia.

Um outro artigo que busca classificar os modelos e algoritmos para o Problema do Caixeiro Viajante é o de Roberti e Toth (2012). Assim como em Oncan *et al.*, muitas formulações são analisadas e implementadas para que possam ser comparadas, no entanto, a classificação dos trabalhos não são inteiramente iguais.

Roberti e Toth (2012) apontam a EC-MCF de Godinho *et al.* (2011) como uma das melhores formulações para a eliminação de sub-rotas, isso porque, teoricamente os limites inferiores desse conjunto de restrição se sobressai quando comparado aos demais. É descrita pelos autores como uma formulação sofisticada, originalmente proposta para o Problema do Caixeiro Viajante com tempo dependente, assim **(FO)** é substituída por **(F1)**, logo a formulação da EC-MCF é dada por **(F1)**, **(1)-(3)**, **(13)-(21)**:

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \sum_{h=1}^{n} z_{ij}^{h} \qquad \textbf{(F1)}$$

$$\sum_{j \in V} z1_{1j}^{(1,k)} = 1, \qquad k = 2, \dots, n \qquad \textbf{(13)}$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{1\}} z1_{ij}^{(h+1,k)} - \sum_{j \in V \setminus \{k\}} z1_{ji}^{(h,k)} = 0, \qquad h = 1, \dots, n-2; k, i = 2, \dots n;\ i \neq k \qquad \textbf{(14)}$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{k\}} z2_{kj}^{(h+1,k)} - \sum_{j \in V \setminus \{k\}} z1_{jk}^{(h,k)} = 0, \qquad h = 1, \dots, n-1; k = 2, \dots, n \qquad \textbf{(15)}$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{k\}} z2_{ij}^{(h+1,k)} - \sum_{j \in V \setminus \{1\}} z2_{ji}^{(h,k)} = 0 \qquad h = 2, \dots, n-1; k, i \in V \setminus \{1\} : i \neq k \qquad \textbf{(16)}$$

$$\sum_{h=1,\dots,n} z_{ij}^{h} = x_{ij} \qquad \textbf{(17)}$$

$$z1_{ij}^{(h,k)} + z2_{ij}^{(h,k)} = z_{ij}^{h} \qquad \textbf{(18)}$$

$$z_{ij}^{h} \in \{0,1\}, \qquad i, j, h = 1, \dots, n \qquad \textbf{(19)}$$

$$z1_{ij}^{(h,k)} \in \{0,1\}, \qquad j, k \in V \setminus \{1\}; i \in V \setminus \{k\}; h = 1, \dots, n-1 \qquad \textbf{(20)}$$

$$z2_{ij}^{(h,k)} \in \{0,1\}, \qquad i, k \in V \setminus \{1\}; j \in V \setminus \{k\}; h = 2, \dots, n \qquad \textbf{(21)}$$

As variáveis adicionais $z1_{ij}^{(h,k)}$ e $z2_{ij}^{(h,k)}$ indicam respectivamente se o arco (i, j) atravessa a posição h na primeira parte do valor ótimo que vincula o vértice 1 ao vértice k e se o arco (i, j) atravessa a posição h na segunda parte do valor ótimo que vincula o vértice k ao vértice 1. A restrição **(13)** determina que todas as comodities (k) estão passando pela posição 1, sendo j a primeira cidade a ser visitada. Em **(14)** é estabelecido que a commodity k passa por todas as cidades até chegar na cidade k. **(15)** afirma que a commodity k foi deixada na cidade k. Na restrição **(16)** é indicado que todas as commodities são entregues antes de retornar a origem. Por fim, as restrições **(17)** e **(18)** são de vinculação, onde relacionam-se as variáveis, e **(19)-(21)** indicam que as variáveis são binárias.

Nesse sentido, os artigos de revisão de Oncan et al. (2009) e Roberti e Toth (2012) são de grande relevância para o estudo comparativo das restrições de eliminação de sub-rotas do tipo fluxo commodities, visto que em ambos trabalhos, as formulações desse tipo possuem uma ótima classificação.

3 METODOLOGIA

Visando o objetivo geral de implementar computacionalmente algumas restrições de eliminação de sub-rotas do tipo fluxo commodities para o Problema do Caixeiro Viajante, e verificar a qualidade de cada uma delas, utilizou-se como metodologia a pesquisa bibliográfica, onde a coleta de informações se deu por meio de livros textos e artigos de revistas especializadas.

Os modelos foram implementados na linguagem de modelagem OPL "*Optimization Programming Language*", livre nas versões acadêmicas, e utilizou-se o CPLEX como solver de otimização. Inicialmente, para a implementação foram escolhidas sete instâncias classificadas como assimétricas e clássicas do TSPLIB, uma biblioteca criada para o PCV por Reinelt (1991) com diversas instâncias de tamanhos que variam de 14 até 85.900 cidades (PRESTES, 2006).

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para verificar a qualidade das restrições de eliminação de sub-rotas do tipo fluxo commodities para o Problema do Caixeiro Viajante, nomeadas aqui de GG, MCF e EC-MCF, foram selecionadas sete instâncias do TSBLIB, sendo elas: br17, ft53, ftv33, ftv35, ftv38, ftv64 e ry48p. Porém optamos também por utilizar uma instância ilustrativa e de autoria pessoal, considerando 14 cidades, a qual denominaremos de C14. A tabela **(1)** apresenta o desempenho computacional das formulações, enquanto a tabela **(2)** fornece dados da relaxação linear.

Tabela 1 – Tempo computacional em segundos

Formulações	Instâncias							
	C14	br17	ft53	ftv33	ftv35	ftv38	ftv64	ry48p
GG	1,11	1,30	20,30	2,23	2,02	2,86	119,84	115,53
MCF	1,26	4,89	509,33	39,78	93,17	333,17	18009,4	1030,09
EC-MCF	694,02	228211,55	-	-	-	-	-	-

Tabela 2 – Relaxação linear

Formulações	Instâncias							
	C14	br17	ft53	ftv33	ftv35	ftv38	ftv64	ry48p
GG	159,15	12,22	6045,04	1195,58	1390,60	1446,82	1723,89	12810,87
MCF	161,67	39,00	-	1286,00	1457,33	1514,33	1806,83	14289,33
EC-MCF	162,50	37,3483	-	-	-	-	-	-

A memória exigida para obter resultados computacionais da EC- MCF eram tais que a máquina em questão (Intel Pentium P6100 @2.00 GHz) foi incapaz de calcular a solução ótima das instâncias de testes do TSBLIB previamente escolhidas, o que motivou não só a utilização da instância pessoal anteriormente citada (C14), mas também a utilização de uma outra máquina com um melhor processador para que pudéssemos pelo menos ponderar sobre o desempenho computacional de tal formulação.

Roberti e Toth (2012), em seus trabalhos de comparação, tampouco relataram quaisquer resultados computacionais da EC-MCF, pelo mesmo motivo apresentado acima. Desta forma, consideraram os resultados apontados em Godinho et al (2011a, b), os quais são ditos teoricamente melhores pelos limites inferiores se sobressaírem quando comparado aos demais, para classificarem as formulações hierarquicamente.

Como no presente estudo foi possível obter resultados das três formulações apenas com a instância do acervo pessoal das autoras (utilizando o mesmo equipamento), a tomaremos como referência nas comparações, visto que de maneira geral, o comportamento dos resultados apresentados nas tabelas, de uma formulação para a outra, foram semelhantes.

Assim sendo, a partir das informações coletadas ao implementar a C14, cujo o custo mínimo (solução ótima) era 167, notou-se que dentre os modelos analisados, o que apresentou a melhor relaxação linear (162,50) foi o EC-MCF, sendo assim considerado o de maior qualidade por apresentar o limite inferior mais próximo da solução ótima, no entanto o seu tempo computacional foi de 694,02 segundos, ou seja, o mais demorado.

Como MCF apresentou a relaxação linear de 161,67, levando 1,26 segundos para retornar à solução ótima, deixou evidente a inferioridade da formulação GG, que apresentou o pior limite inferior (159,15), porém destacou-se quanto ao seu desempenho computacional com o tempo de 1,11 segundos, o que já era esperado, por conta de ser considerado uma única commodity.

Diante dessa situação, a superioridade da qualidade modelo EC-MCF fica evidente, pois 694,02 segundos (aproximadamente 11 minutos e 30 segundos) é um tempo relativamente baixo, logo é viável. No entanto, se olharmos para a formulação de maneira geral, é nítido que se a finalidade da modelagem for obter uma solução rápida para o problema através da implementação, dificilmente esta será a melhor opção de escolha. Isto pode ser observado no teste da br17, que levou aproximadamente 63 horas 23 minutos e 56 segundos (228211,55 segundos) para chegar a uma solução ótima para o problema, ou seja, é a formulação que requer mais tempo computacional e consequentemente um computador com uma boa memória, sendo muitas vezes inviável.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

O desenvolvimento do presente trabalho buscou analisar restrições de eliminação de sub-rotas para o Problema do Caixeiro Viajante, destacando as de melhor qualidade e tempo computacional. Visto que, geralmente evidenciam-se apenas as formulações que apresentam os melhores limites de relaxamento.

Nos artigos de revisão utilizados para este trabalho por exemplo (Oncan *et al*. (2009) e Roberti e Toth (2012)), apesar dos autores apresentarem o desempenho computacional dos modelos, suas classificações dão se por meio de suas relaxações lineares. Porém com os estudos computacionais tabelados, é perceptível que as hierarquias até então propostas, tornem-se invertidas ao considerar o tempo que as formulações levam para retornar à solução ótima, afinal, quanto melhor o limite inferior maior será o tempo computacional. Assim, é preciso refletir sobre a finalidade do modelo matemático estudado para se determinar o melhor conjunto de restrições para eliminação de sub-rotas.

Diante disso, o próximo passo seria fazer implementações de outras instâncias clássicas conhecidas para o Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico, de forma a se obter resultados próximos aos que vem sendo testados e discutidos na literatura, pois considerando que muitos problemas reais utilizam os tipos de restrições apresentadas como subproblemas, entendê-las contribui para a solução de problemas maiores e mais complexos.

REFERÊNCIAS

CLAUS, A. A new formulation for the travelling salesman problem. **SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods**, v. 5, n. 1, p. 21-25, 1984.

CONTE, N. **O problema do caixeiro viajante, teoria e aplicações**. 2002. 99 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/118198/000339835.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 08 ago. 2020.

DANTZIG, G; FULKERSON, R; JOHNSON, S. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. **Journal of the operations research society of America**, v. 2, n. 4, p. 393-410, 1954.

GAVISH, B.; GRAVES, S. C. The travelling salesman problem and related problems. 1978.

GODINHO, M. T.; GOUVEIA, L.; PESNEAU, P. Natural and extended formulations for the time-dependent traveling salesman problem. **Discret Appl Math**, 2011a. Doi: 10.1016/j.dam.2011.11.019

GODINHO, M. T.; GOUVEIA, L.; PESNEAU, P. On a time-dependent formulation and an updated classification of ATSP formulations. 2011.

FARIAS,N.F.S; RIBEIRO, J.M.A.; BEZERRA, A.A.; ARAÚJO, R.S.A. Dimensionamento de redes de distribuição de água utilizando Teoria dos Grafos. **Brazilian Journal of Development**, v.7, n.5, p. 52544-52561, 2021.

LANGEVIN, A.; SOUMIS, F.; DESROSIERS, J. Classification of travelling salesman problem formulations. **Operations Research Letters**, v. 9, n. 2, p. 127–132, 1990.

MENGER, K. Das botenproblem**. Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums**, v.2, n.4, p. 11-12, 1932.
MILLER, C. E.; TUCKER, A. W.; ZEMLIN, R. A. Integer programming formulation of traveling salesman problems. **Journal of the ACM (JACM)**, ACM New York, NY, USA, v. 7, n. 4, p. 326–329, 1960.

OLIVEIRA, A. F. M. A. **Extensões do Problema do Caixeiro Viajante**. 2015. 89 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2015. Disponível em: https://eg.uc.pt/bitstream/10316/31684/1/Tese_AndreOliveira.pdf. Acesso em: 09 set. 2020.

ONCAN, T.; ALTINEL, I. K.; LAPORTE, G. A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations. **Computers & Operations Research**, v. 36, n. 3, p. 637-654, 2009. DOI:10.1016/j.cor.2007.11.008

PRESTES, Á. N. **Uma análise experimental de abordagens heurísticas aplicadas o problema do caixeiro viajante**. 2006. 85 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Sistemas e Computação, Departamento de Informatica e Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

REINELT, G. TSPLIB—A traveling salesman problem library. **ORSA journal on computing**, v. 3, n. 4, p. 376-384, 1991.

ROBERTI, R. e TOTH, P. Models and algorithms for the asymmetric traveling salesman problem: an experimental comparison. **EURO Journal on Transportation and Logistics**, v. 1, n. 1-2, p. 113-133, 2012. DOI: 10.1007/s13676-012-0010-0

SILVA, F. A. M. *et al*. **Estudo de formulações do problema do caixeiro viajante e sequenciamento de tarefas e suas aplicações em um problema prático de produção na indústria de pães e bolos**. 2019. 219 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/335600/1/Silva_FelipeAugustoMoreiraDa_D.pdf. Acesso em: 07 set. 2020.

WONG, R. T. Integer programming formulations of the traveling salesman problem. In: **Proceedings of the IEEE international conference of circuits and computers**. IEEE Press Piscataway NJ, 1980. p. 149-152.