

**Os detetives da matemática: a aula de investigação matemática com alunos do projeto emapol****The math detectives: the math investigation class with emapol project students**

DOI:10.34117/bjdv6n10-233

Recebimento dos originais: 10/09/2020

Aceitação para publicação: 13/10/2020

**Gabriele Souza de Carvalho**Especialização em Educação Matemática  
Colégio Estadual Ministro Oliveira Brito

Endereço: Rua São Judas Tadeu, 140, Centro – Inhambupe-Ba. CEP: 48490-000

e-mail: gabriele\_carvalho2@hotmail.com

**Grace Dórea Santos Baqueiro**Doutorado em Educação Matemática  
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

Endereço: Rua Politeama de Baixo, 67. Bairro: Politeama. Salvador-Ba. CEP: 40080-166

e-mail: gbaqueiro@uneb.br

**RESUMO**

Descreveremos uma experiência vivenciada em um curso de especialização em educação matemática ao se abordarem as tendências ‘resolução de problemas’ e ‘investigação matemática’. A primeira autora, sob orientação da coautora, desenvolveu a metodologia de investigação matemática aplicando-a em uma aula ministrada a nove alunos do ensino fundamental participantes do projeto de extensão intitulado *Estudando Matemática para as Olimpíadas* (EMAPOL). Para tanto, escolheu o assunto ‘noção de equivalência’ e utilizou uma atividade extraída do *site* da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. A aula se compôs de três momentos: introdução, desenvolvimento e discussão. Dos três grupos formados pelos alunos colheram-se registros escritos e em audiografações. A aplicação dessa metodologia de ensino exigiu da professora formadora dedicar-se mais ao preparo da aula e sair de sua zona de conforto, ao ter que desafiar os alunos, mediá-los e avaliá-los. O resultado foi estimulante, com envolvimento dos participantes em cada etapa dos processos que caracterizam a atividade investigativa matemática: exploraram o problema proposto, formularam questões, conjecturaram e justificaram suas respostas.

**Palavras-chave:** equivalência; formação docente; investigação matemática; resolução de problemas.

**ABSTRACT**

We will describe an experience lived in a specialization course in mathematics education when addressing 'problem solving' and 'mathematics research' trends. The first author, under the guidance of the co-author, developed the methodology of mathematical research by applying it in a class taught to nine elementary school students participating in the extension project entitled *Studying Mathematics for the Olympics* (EMAPOL). To do so, she chose the subject 'notion of equivalence' and used an activity taken from the website of the Brazilian Public Schools Mathematics Olympiad. The class was composed of three moments: introduction, development and discussion. From the

three groups formed by the students, written records and audio recordings were collected. The application of this teaching methodology required the teacher to devote herself more to preparing the class and leaving her comfort zone, by having to challenge the students, mediate and evaluate them. The result was stimulating, with the participants being involved in each stage of the processes that characterize the mathematical research activity: they explored the proposed problem, formulated questions, conjectured and justified their answers.

**Keywords:** equivalence; teacher training; mathematical research; problem solving.

## 1 INTRODUÇÃO

Como aponta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mesmo sendo a matemática uma ciência hipotético-dedutiva, “é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem” dessa ciência (BRASIL, 2018, p. 263). O documento acrescenta que:

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2018, p. 264)

Abordar atividades investigativas em sala de aula proporciona aos alunos a oportunidade de participarem da construção de seu conhecimento, de serem autônomos, de terem suas opiniões e de conseguirem tomar decisões. “A interpretação da tarefa deve ser, por ela própria, um dos objetivos destas aulas, pelo que, gradualmente, deve esperar-se que o aluno a realize autonomamente ou com os seus colegas” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 3). No ensino e aprendizagem de matemática, a compreensão é um elemento de fundamental importância. Segundo Duval (2018, p. 2), fazer com que os alunos embarquem na maneira de pensar e de trabalhar que é específica à matemática é o maior desafio do ensino dessa ciência, “uma vez que é essa a condição que precede toda aquisição dos conceitos em matemática”.

O presente relato descreve uma experiência proporcionada pela disciplina ‘Resolução de problemas e investigação matemática’ do curso de Especialização em Educação Matemática da Universidade do Estado da Bahia – Campus II Alagoinhas. As tendências nela abordadas foram trabalhadas com alunos do projeto de extensão dessa universidade, intitulado *Estudando Matemática para as Olimpíadas* (EMAPOL). Aplicamos um problema embasado em Onuchic (1999) e desenvolvemos a metodologia de investigação Matemática pautando-nos nas ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003).

**2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA**

Na década de 1990, Onuchic (1999) ressaltou a importância da resolução de problemas, apontando que essa tendência vinha ganhando atenção dos educadores matemáticos por considerar os alunos como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade de problemas como uma coordenação complexa e simultânea de vários níveis de atividade:

A verdadeira força da resolução de problemas requer um amplo repertório de conhecimento, não se restringindo a peculiaridades técnicas e aos conceitos, mas estendendo-se às relações entre eles e aos princípios fundamentais que os unificam. O problema não pode ser tratado como um caso isolado. A matemática precisa ser ensinada como matemática e não como um acessório subordinado a seus campos de aplicação. Isso pede uma atenção continuada a sua natureza interna e a seus princípios organizados, assim como a seus usos e aplicações. (ONUCHIC, 1999, p. 204-205)

Portanto, abordar resolução de problemas em sala de aula vai além de explicar técnicas de resolução. Para Onuchic (1999), o foco do ensino de matemática deve ser a compreensão, pois quando o aluno constrói sua aprendizagem os conceitos que aprende são mais sólidos do que quando estes lhe são impostos. Desta maneira, o docente possibilita ao aluno apoderar-se de um importante meio para desenvolver sua compreensão. A resolução de problemas passa a ser um caminho para adquirir conhecimentos.

Relacionamos este caminho apontado por Onuchic com o da aula de investigação matemática, abordagem sugerida por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), em que a atividade investigativa visa desenvolver a interpretação das questões matemáticas. Relatam que uma atividade de investigação costuma abranger três etapas: (1) introdução da tarefa, (2) realização da investigação e (3) discussão dos resultados. Essas etapas devem permitir que os alunos sejam capazes de utilizar os processos que caracterizam a atividade de investigação matemática (Quadro 1).

Quadro 1 – Processos que caracterizam a atividade investigativa em matemática.

Processos		O que ocorre
P <sub>1</sub>	Exploração de questões	Familiarização com a atividade proposta, destacando, organizando e, se preciso, gerando mais dados.
P <sub>2</sub>	Formulação de questões	Surgem indagações a respeito do que fazer e de como fazê-lo.
P <sub>3</sub>	Formulação de conjecturas	São feitas deduções a partir das observações e manipulações dos dados e por vezes, o que pode ficar confinado ao pensamento dos alunos, podendo ser explicitado pela linguagem gestual, oral ou escrita.
P <sub>4</sub>	Teste de conjecturas	Verificação das conjecturas feitas, manipulação dos dados para verificar se as conjecturas feitas são válidas.

P <sub>5</sub>	Reformulação de conjecturas	São feitas novas deduções.
P <sub>6</sub>	Justificação de conjecturas	Apresentação de um raciocínio plausível, argumentado com uso das ferramentas matemáticas de que os alunos dispõem.
P <sub>7</sub>	Avaliação do trabalho	Análise de todo o percurso feito, confrontando as estratégias, conjecturas e justificações.

Fonte: Adaptado de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003).

Na aula de investigação, o docente deixa de assumir o papel de “transmissor” do conhecimento e passa a ser mediador, suscitando curiosidade nos alunos e instigando-os a buscar respostas para o problema. “O professor continua sendo o elemento-chave [...] nestas aulas, cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 1).

Quadro 2 – Papel do professor em aulas de investigação.

Passos		O que ocorre
1.º	Desafiar os alunos	Criar um ambiente adequado ao trabalho investigativo; utilizar atividades que potencialmente constituam um desafio para os alunos; estimular a criatividade dos alunos.
2.º	Avaliar o progresso dos alunos	Observar e recolher as informações durante o desenvolvimento da investigação; adotar estratégias de interação com os alunos.
3.º	Raciocinar matematicamente	Predisposição a manifestar seu raciocínio matemático perante os alunos; proporcionar o estabelecimento de conexões com outros conceitos matemáticos e até extramatemáticos; estimular os alunos a refletir sobre conceitos.
4.º	Apoiar o trabalho dos alunos	Formular questões mais ou menos diretas; fornecer ou recordar informações relevantes; sintetizar e promover a reflexão dos alunos sobre o processo; privilegiar a postura interrogativa.

Fonte: Adaptado de Ponte, Brocardo e Oliveira, (2003).

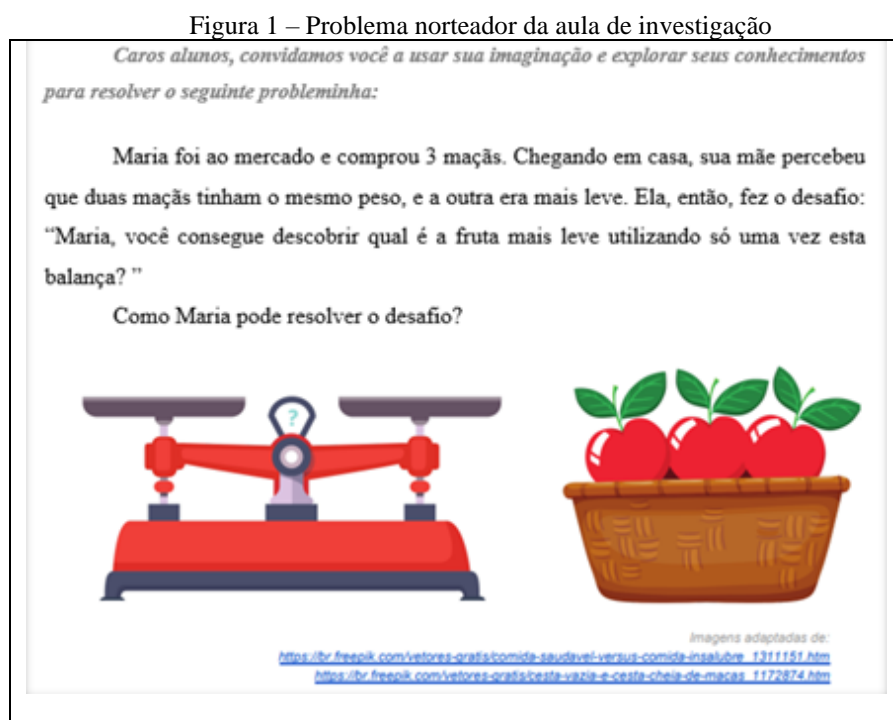
“De facto, as investigações constituem um contexto muito favorável para gerar boas aulas de discussão entre os alunos”, apontam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 13), frisando que constituem momento propício para que os estudantes percebam a importância da justificação matemática, das conjecturas, do sentido de uma demonstração matemática, do significado de investigar. Além disso, podem desenvolver a capacidade de comunicar-se matematicamente, experimentar, refletir sobre o trabalho e perceber a importância da argumentação.

Reconhecendo a importância de aplicar problemas no ensino de matemática por meio de aulas investigativas, iniciamos nosso planejamento escolhendo um assunto e uma situação-problema a serem explorados em sala de aula.

### 3 O PROBLEMA E A ATIVIDADE

A primeira autora deste artigo (doravante referida como professora formadora), além de participar de um curso de formação continuada em educação matemática lecionado pela coautora, atua como monitora do projeto de extensão EMAPOL, no qual buscou pôr em prática as tendências estudadas na disciplina mencionada e assim cumprir uma das avaliações do curso.

Visitando o Portal do Saber disponível no *site* da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), a professora formadora selecionou um problema que envolvia uma balança (Figura 1).



Fonte: OBMEP (s.d.).

A atividade com o problema selecionado foi planejada para durar três horas-aula e ser aplicada a nove alunos do 6.º ano do ensino fundamental de uma rede municipal de ensino que participavam do projeto EMAPOL, com o objetivo de explorar as *propriedades da igualdade* para construir a *noção de equivalência*. O esperado era que os alunos percebessem que, *se a balança ficasse equilibrada, a maçã mais leve seria a que ainda não foi pesada e, se ela não se equilibrasse, a maçã estaria no prato mais alto*.

A professora formadora comprou potes de plástico no formato de maçãs e confeccionou uma balança com materiais simples: pratos descartáveis, uma garrafa de água mineral de 2 litros, cordão e uma vara de madeira (Figura 2). A finalidade era que os alunos visualizassem e experimentassem situações de “pesagem”, simulando concretamente o problema. Para tanto, foi colocado um doce dentro de duas das maçãs, deixando a terceira vazia.

Figura 2 – A balança de dois pratos confeccionada para a atividade.



Como sugerido por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), a atividade compôs-se de três momentos: *introdução, desenvolvimento e discussão dos resultados*. Para coleta dos dados, utilizou-se gravador e registros escrito dos alunos por meio de uma atividade impressa com o problema selecionado (Figura 1).

#### 4 AULA DE INVESTIGAÇÃO EM AÇÃO

A aula teve início com um diálogo destinado a nos revelar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito da balança de dois pratos, condição necessária para que entendessem e resolvessem o problema. Foram-lhes feitas perguntas como: *Vocês conhecem uma balança de dois pratos? Se a balança está equilibrada, então podemos concluir o que quanto ao peso dos objetos? Quando é que uma balança de dois pratos está equilibrada?* As respostas mostraram que a maioria alunos conhecia esse instrumento, bem como seu funcionamento.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), pode-se sempre programar o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela terminará. Foi exatamente isto que aconteceu. Após as perguntas sobre a balança, planejáramos entregar o problema impresso para que os alunos o resolvessem. No entanto, um deles sugeriu que fizéssemos mais perguntas, mas individuais. Foi assim que a professora formadora percebeu que alguns estudantes tinham dúvidas a respeito de a balança estar ou não equilibrada. Fez então novas perguntas, utilizando a balança improvisada para comparar as massas do lápis, caneta e apagador, entre outros objetos da sala de aula. Tendo testado a balança com vários objetos, a professora formadora, em raciocínio rápido, teve a ideia de

relacionar o equilíbrio e desequilíbrio com exemplos *numéricos*. A Figura 3 mostra o diálogo gravado nesse momento.

Figura 3 – Transcrição de diálogo.

Professora: Bora pensar em um número aqui... Prestando atenção aqui agora, a gente viu esse caso com os materiais, se a gente for pensar em números, um exemplo aqui: se de um lado eu tenho o número 5 e do outro 3 e quero que essa balança fique equilibrada. Eu uso o sinal de igual, diferente maior ou menor?

Turma: Igual.

Professora: Se eu já sei que de um lado meu peso é cinco quilos e do outro lado eu tenho um peso de três quilos. O que é que eu tenho que fazer?

Aluno E: colocar mais dois quilos.

Professora: Muito bem!

Aluno D: Porque dá cinco que é igual a três mais dois.

Professora: Se eu quisesse que ficasse maior (  $5 > \underline{\quad}$  ) eu teria que colocar um peso lá de qual?... Cinco tem que ser maior do que o outro lado. Então, o que é que tem que acontecer?

Aluno C: dois?

Professora: Poderia colocar dois, poderia colocar três e poderia colocar 4, só não poderia colocar cinco porque ele tem que ser maior e aí ficaria igual.

Nesse *primeiro momento* da investigação, os alunos demonstraram compreender que se os pratos estivessem à mesma altura a balança estaria equilibrada; se ficassem em alturas diferentes teríamos um desequilíbrio. Portanto, o prato que descresse teria o objeto mais pesado e o que subisse teria o mais leve.

Solicitou-se que os alunos se organizassem em três trios. A professora formadora explicitou que a ideia do trabalho em grupo era que todos colaborassem com a investigação. Informou que iriam fazer uma atividade de investigação matemática e indagou: *Vocês sabem o que é investigar?* Responderam que sim e um deles ressaltou que *é o que o detetive faz*. Satisfeita com a resposta, a professora formadora informou: *Hoje aqui na sala cada um vai ser um detetive da matemática*. E perguntou: *O que um detetive faz?* A turma respondeu: *Investiga, procura pistas...*

Este foi o momento ideal para apresentar a atividade. A professora formadora lhes disse: *Isso! Muito bem! Essas pistas vão estar no problema que eu vou entregar para vocês. Montem aí o grupinho e escolham um nome fictício para vocês*. Animados com a novidade, eles se agruparam e escolheram estes nomes: Detetives do Prédio Azul (grupo 1), Detetives do Prédio Amarelo (grupo 2) e Detetives Misteriosos (grupo 3).

A atividade ficou exposta pelo projetor e também foi entregue impressa aos alunos. Seguindo instruções de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), o problema foi lido para a turma e solicitou-se que buscassem resolvê-lo em grupo.

Na resolução da atividade (*segundo momento* de uma aula investigativa), a professora formadora passou a atuar como *mediadora*, sempre próxima aos grupos, auxiliando o desenvolvimento do pensamento dos alunos na busca da solução do problema, mas sem dar respostas, adotando assim recomendações de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003). Os alunos, concentrados na atividade, leram o enunciado, conjecturaram algumas possibilidades de resolução e, em alguns momentos, chamaram a professora formadora para tirar dúvidas ou perguntar se a resposta estava correta.

Como o tempo da aula havia se esgotado, a professora formadora, seguindo instruções de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), recolheu as atividades, levou-as para casa e analisou as respostas. Uma semana depois, as respostas foram socializadas e discutidas (*terceiro momento* da aula investigativa). O problema foi mais uma vez lido coletivamente e, por questão de tempo, a professora formadora escreveu as respostas dos três grupos na lousa por ordem de apresentação (Quadro 3).

Quadro 3 – Respostas da atividade de investigação.

Grupo	Transcrição da resolução
Detetives do Prédio Azul	“Se colocar a mesma maçã e colocar mais um peso em um lado, um fica mais leve.”
Detetives do Prédio Amarelo	“Aquele que subiu é a mais leve e a que desceu é a que está mais pesada. É porque tem algumas maçãs ocas.”
Detetives Misteriosos	“Equilibrando as duas, se der igual vai saber que a outra é a mais leve. Calculando: tentando duas possibilidades de ficar equilibrada a balança ou desequilibrada.”

Fonte: Dados da pesquisa.

Observando a resposta do grupo Detetives do Prédio Azul, cogitamos que seus membros pensaram em uma maneira de desequilibrar a balança caso esta tivesse massas iguais sobre os pratos. Tal estratégia, porém, não responde à pergunta do problema.

Os Detetives do Prédio Amarelo perceberam uma das possibilidades de encontrar a maçã mais leve: representaram a balança desequilibrada e explicaram que a maçã mais leve estava no prato que subiu (Figura 4).



Figura 4 – Resposta dos Detetives do Prédio Amarelo.



Foi no momento da socialização das respostas dos Detetives Misteriosos que os Detetives do Prédio Amarelo perceberam haver outra possibilidade de encontrar a maçã mais leve.

No desenvolvimento da tarefa, percebemos que o grupo Detetives Misteriosos foi o que mais explorou e formulou questões, bem como testou e justificou suas conjecturas. Seus membros apresentaram as duas possibilidades de resolução esperadas (Quadro 3), mas só explicaram como identificar a maçã mais leve no caso em que a balança ficasse equilibrada, faltando-lhes explicar como identificariam a maçã mais leve se a balança se desequilibrasse.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A experiência relatada levou-nos a conjecturar que a aula de investigação matemática proporciona um ambiente propício para explorar a resolução de um problema como caminho para aprender matemática.

Com olhar atento ao caminho percorrido durante a aula de investigação matemática, pudemos perceber que na introdução da tarefa, que visou familiarizar os alunos com o instrumento de medida (balança de dois pratos), eles se envolveram e conseguiram vivenciar alguns dos processos que caracterizam a atividade investigativa em matemática (Quadro 1). No primeiro momento (introdução da tarefa), a monitora garantiu que os alunos entendessem o sentido da atividade proposta e o papel a ser desempenhado por cada um deles. No segundo momento (realização da investigação), os alunos seguiram envolvidos com o problema, o que lhes permitiu desenvolver processos que caracterizam a atividade investigativa (Quadro 1), enquanto, a todo momento, se questionavam e contavam com a mediação da monitora. No terceiro momento (discussão dos resultados), quando cada grupo explicou sua resposta e ouviu as dos colegas,

observamos que conseguiram verificar a validade de suas conjecturas e perceberam as duas maneiras de encontrar a resposta para o problema das maçãs.

Trabalhar com essa metodologia de ensino permitiu-nos perceber que ela requer do professor maior dedicação e mesmo a saída de sua *zona de conforto*, pois, como relatam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), na aula de investigação matemática o papel do professor é desafiar, avaliar, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho dos alunos (Quadro 2), e para isso deve utilizar atividades que lhes possibilitem desenvolver os sete processos que caracterizam a atividade investigativa em matemática (Quadro 1). O envolvimento dos alunos na aula foi perceptível ao empreenderam processos de exploração tanto da atividade quanto do instrumento utilizado, bem como fazerem testes e deduções e trabalharem em grupo produzindo argumentos com os colegas.

Consideramos a experiência enriquecedora tanto para o campo profissional quanto pessoal. Foi gratificante desenvolver uma nova maneira de fazer matemática em sala de aula. Destacamos o pensamento de Onuchic (1999) de que o trabalho de ensino de matemática deve acontecer em um ambiente de investigação e que trabalhar a resolução de problemas requer primordialmente compreender os conceitos envolvidos e as técnicas operatórias e processos necessários. “Numa aula de investigação matemática, tal como em qualquer outra, tudo o que acontece depende em boa medida do professor e dos alunos” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 24).

**REFERÊNCIAS**

BRASIL, Ministério da Educação. *Base nacional comum curricular*. Brasília: MEC, 2018.

DUVAL, Raymond. Como analisar a questão crucial da compreensão em matemática? *Revemat*, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 1-27, 2018. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2018v13n2p1>>. Acesso em: 11 jan. 2019.

OBMEP – OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. *Desafio das frutas I*. [s.d.]. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=143>>. Acesso em: 13 nov. 2018.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida V. (Org.). *Pesquisa em matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigação matemática na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.