Brazilian Journal of Development

Estudando a identificação e construção de números algébricos e transcendentes via técnicas algébricas e analíticas contando com a história da matemática

Studying the identification and construction of algebraic and transcendent numbers via algebraic and analytical techniques counting the history of mathematics

DOI:10.34117/bjdv6n10-164

Recebimento dos originais: 08/09/2020
Aceitação para publicação: 07/10/2020

Yasmin Giles Santana
Ensino superior incompleto (Licenciatura em Matemática Instituto federal do Espírito Santo (IFES)
Endereço: R Marajoara n 53 Glória vila velha es
E-mail: Y.giles.y@gmail.com

Diogo Oliveira
Mestre em matemática pela Universidade federal de São João Del Rey (UFSJ)
Endereço:Av. Vitória, 1729 - Jucutuquara, Vitória - ES, 29040-780
Professor do IFES
E-mail: diogooliveira2704@gmail.com

Ygor Franzotti de Barros Gomes
Mestre em Matemática Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)
Endereço:Av. Vitória, 1729 - Jucutuquara, Vitória - ES, 29040-780
Professor do IFES

Brazilian Journal of Development

RESUMO
A história dos números irracionais relata sua descoberta cerca de 2500 anos atrás quando, ao calcular a hipotenusa de um triângulo cujos catetos mediam uma unidade de comprimento, Hipaso de Metaponto, um dos discípulos de Pitágoras, obteve como resultado o número $\sqrt{2}$, e notou ainda que esse valor não era comensurável, esse seria o primeiro número irracional. Veja que os racionais podem ser mostrados como raízes de polinômios de coeficientes inteiros, outro conjunto de números surge então a partir dos estudos de Joseph Liouville em 1844, os números transcendentais ou transcendentes que são, junto aos irracionais, o alvo da nossa pesquisa que tem como objetivo a identificação e construção de números irracionais e transcendentais via técnicas algébricas.

Palavras-chave: Transcendentes, Irracionais, História da Matemática, Análise, Álgebra.

ABSTRACT
The history of irrational numbers tells its discovery about 2500 years ago when, when calculating the hypotenuse of a triangle whose catetos measured a unit of length, Hippos of Metaponto, one of Pythagoras' disciples, obtained as a result the number $\sqrt{2}$, and noted also that this value was not commensurable, this would be the first irrational number. See that the rational can be shown as roots of polynomials of whole coefficients, another set of numbers emerges then from the studies of Joseph Liouville in 1844, the transcendental or transcendental numbers that are, along with the irrational, the target of our research that aims to identify and build irrational and transcendental numbers via algebraic techniques.

Keywords: Transcendental, Irrational, History of Mathematics, Analysis, Algebra.

1 INTRODUÇÃO

A história dos números irracionais relata sua descoberta cerca de 2500 anos atrás quando, ao calcular a hipotenusa de um triângulo cujos catetos mediam uma unidade de comprimento, Hipaso de Metaponto**,** um dos discípulos de Pitágoras, obteve como resultado o número $\sqrt{2}$, e notou ainda que esse valor não era comensurável, esse seria o primeiro número irracional. Mas os racionais e o número $\sqrt{2}$ podem ser mostrados como raízes de polinômios de coeficientes inteiros, outro conjunto de números surge então a partir dos estudos de Joseph Liouville em 1844, os números transcendentais ou transcendentes que são, junto aos irracionais, o alvo da nossa pesquisa que tem como objetivo a identificação e construção de números irracionais e transcendentais via técnicas algébricas.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 HISTÓRIA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Os primeiros relatos a respeito dos números irracionais constam do sec. 5 a. C, quando os gregos perceberam a necessidade de se trabalhar com uma nova representação de números, pois os racionais já não eram suficientes para atenderem aos dados geométricos por eles encontrados, isso se deu quando, ao calcular a diagonal de um quadrado de lado unitário, usando o Teorema de Pitágoras eles viram que a diagonal do quadrado seria e daí enxergaram que esse número não se tratava de um racional, o que significa não existir uma fração de espaço que possa ser colocada um número inteiro de vezes sobre a diagonal e o lado do dado quadrado.

Essa descoberta foi, segundo a história, feita por um estudioso que pertencia a uma confraria, a qual havia sido fundada por Pitágoras de Samos, filósofo e matemático grego jônico fundador do movimento chamado pitagorismo, nessa confraria estudavam propriedades dos números, da astronomia e da música. A esses estudiosos é creditada uma gama de realizações e descobertas sobre matemática e áreas afins, como por exemplo, o desenvolvimento do Teorema de Pitágoras. Porém as informações a respeito de Pitágoras são recheadas de incertezas e especulações, isso porque nenhum documento daquela época chegou à atualidade.

Essa descoberta causou uma grande crise, pois contrariava o que os pitagóricos acreditavam e pregavam, de que tudo poderia ser explicado ou representado por meio de números, de modo que o assunto permaneceu escondido até que um dos seguidores de Pitágoras chamado Hipaso de Metaponto teria revelado o tal segredo a não membros da confraria, e recebeu como castigo a morte.

Outro momento relatado pela história sobre o conceito de números irracionais foi no século XIX a partir de um movimento chamado de aritmetização da análise. Foi a partir desse momento que se organizou as informações sobre os números irracionais tais como conhecemos atualmente, essa nova maneira é resultado de um movimento de discussão dos fundamentos dos sistemas numéricos.

Porém esse movimento começou séculos atrás, ainda na Idade Média, pelos matemáticos árabes, os quais também trabalhavam com outros conceitos como o zero, os números negativos, dentre outros.

Al-kwarizmi, matemático árabe que viveu no séc. IX, tratava os números racionais e irracionais como audíveis e inaudíveis. Séculos depois, o termo passou a ser chamado de Surdus por estudiosos como Gerardo de Cremona (século XII), Leonardo Fibonacci (século XIII) e Robert Recorde (século XVI). A partir daí, surgiram novos desenvolvimentos desde o descobrimento de novos tipos de irracionais até questões práticas de racionalização de denominadores. Outro exemplo desses avanços é o trabalho de François Viète (1540 – 1603) com uma expansão para π, de Girolamo Cardano (1501 – 1576) com a racionalização de frações com raízes cúbicas, entre outros.

Descobertas feitas por árabes e Indus acerca de raízes não reais, os quais hesitaram em representá-las, só foram desenvolvidas pelos italianos Cardano e Bombelli, com mais destaque para Cardano que foi o primeiro a ousar representar o imaginário por um símbolo (DANTZIG, 1970). Sendo então os italianos do no século XVI que abriram caminho para a expansão do conceito de número. Mas esse processo se alongaria por séculos, pois ainda não aceitavam o irracional como número, eles eram sim tratados como necessários, mas não como números. Exemplo disso tem um trecho de um trabalho contemporâneo a Cardano, o qual foi retirado de Arithmetica Integra, do alemão Michael Stifel:

> Na demonstração de figuras geométricas, quando os números racionais falham, os números irracionais tomam o seu lugar e provam exatamente aquelas coisas que os números racionais não puderam provar... nós somos compelidos a afirmar que eles são números verdadeiros, compelidos pelos resultados que seguem do seu uso – resultados os quais percebemos que são reais, certos e constantes. Por outro lado, outras considerações nos compelem a negar que os números irracionais sejam mesmos números. A saber, quando os submetemos à numeração (representação decimal), descobrimos que eles fogem eternamente, de tal forma que nenhum deles podem ser apreendidos precisamente neles mesmos. Assim como um número infinito não é um número, um número irracional não é um número de verdade, pois permanece escondido em uma nuvem de infinito (KLINE, 1972, p. 251, apud BROETTO, 2016).

Os estudos sobre os irracionais continuaram, "No século XVIII, as questões de ordem práticas relacionadas aos números irracionais continuavam em alta" (BROETTO, 2016 P. 74). Mas ainda não seria nessa época que começariam a se preocupar com fundamentações matemáticas, mas somente no século XIX essa situação viria a sofrer mudanças, isso porque perceberam a falta de clareza nos fundamentos do sistema numérico, primeiro devido ao desenvolvimento da álgebra e da análise. Os trabalhos que vieram a mostrar que as bases que sustentavam os sistemas numéricos ainda eram muito intuitivas foram de Bernard Bolzano (1781 – 1848) e de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) com as funções contínuas e de Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) com os limites de sequências. Segundo o matemático alemão Karl Weierstrass (1815 – 1897), para apresentar as propriedades das funções contínuas, seria necessário construir aritmética do continuum, isto é, dos números reais (KLINE, 1972).

O segundo motivo que levou a essa preocupação com as fundamentações matemáticas foi, ao retirar o quinto postulado de Euclides, fato esse que fez surgir geometrias como a geometria elíptica e a hiperbólica, chamadas de não euclidianas. Criando insatisfações em relação aos fundamentos da matemática.

Com isso precisou-se reerguer a matemática e o esteio escolhido na época foi a aritmética, pois, para os matemáticos todas as teorias deveriam se basear nos números naturais em última instância. As razões para essa escolha foram duas: a primeira delas seria devido ao fato de todos os números podem ser construídos a partir dos naturais, a segunda seria porque a geometria euclidiana, que no momento estava abalada devido ao surgimento de outros tipos de geometria poderia assim ser reorganizada pela correspondência entre elementos geométricos e equações, a geometria analítica (ÁVILA, 2006).

Além disso, o uso dos naturais como base sustentável para a matemática era encalçado em questões de fundo filosófico, pois nessa época defendiam-se dois componentes essenciais da matemática, a lógica e a intuição. Poincaré reconhece que existem dois tipos de espíritos diferentes na matemática, os que caminham passo a passo seguindo estritamente a lógica, e os que se deixam guiar pela intuição e conseguem importantes conquistas de forma rápida, como se fossem ousados cavaleiros na linha de frente (POINCARÉ, 1995, p.13).

Para Poincaré, aritmética e a intuição do número puro são como bases seguras da matemática, e então por meio da aritmetização a análise evoluiu e se concretizou, chegando ao seu rigor absoluto.

> Hoje em dia, na análise, não restam mais que números inteiros, ou sistemas finitos ou infinitos de números inteiros, ligados entre si por uma rede de relações de igualdade ou desigualdade. A matemática como se diz, aritmetizou-se (POINCARÉ, 1995, p. 17).
> Ora, na análise hoje, quando queremos nos dar ao trabalho de ser rigorosos, não há mais que silogismos ou apelos a essa intuição do número puro, a única que não pode nos enganar. Pode-se dizer hoje que o rigor absoluto foi atingido (idem, p. 19).

A confiança de Poincaré ao falar da análise real no início do século XX deve-se principalmente, mas não apenas, aos bem-sucedidos (ou bem-aceitos) trabalhos de George Cantor e Richard Dedekind na formalização do sistema numérico (BROETTO, 2016, p.79).

Essa dedicação em organizar e sistematizar a matemática contribuiu para a publicação de três construções dos números reais de forma independente: Richard Dedekind por meio de cortes de racionais (ou cortes de Dedekind), Charles Méray (1835 – 1911) e George Cantor por meio de sequências fundamentais, e Karl Weierstrass e Eduard Haine (1821 – 1881) por meio de frações decimais. Esses trabalhos mudavam a forma de fazer matemática (BROETTO, 2016, P. 80)

Na época o papel da definição era alcançar e descrever número, assim, sendo os irracionais o limite de sequências racionais, poderíamos dizer que o número estaria presente no lugar para onde essa sequência se convergia (BALDINO, 1994, p. 6). Essa definição foi insatisfatória, e a solução do problema mudaria não só o conceito de número, mas também o papel de uma definição. Segundo Baldino (1994), é importante reforçar que houve 'construção' dos números reais, e que, além disso, o papel da definição mudava de descritivo para constitutivo.

> Em vez de uma presença metafísica a priori que pedia uma determinação de seu lugar por um processo de aproximações sucessivas, foi o próprio processo de aproximação que se impôs como presença no lugar que ele mesmo indicava. Dissolveu-se a consistência ontológica do número como entidade metafísica (BALDINO, 1994, p. 7).

Com isso podemos pensar no sistema numérico como um desejo de que cada ponto numa reta corresponda a um número (COURANT; ROBBINS, 2000). Pois em usos práticos os racionais são suficientes, ou mesmo, os decimais exatos já são suficientes para cobrirem a reta densamente, ou seja, dado um ponto na reta, é possível encontrar um decimal tão próximo quanto se queira desse ponto.

Enfim, a aritmética foi base para o reequilíbrio da matemática, tendo como única solução a construção do número real, essa revisão ajudou a criar o sentimento de dever cumprido, ou seja, perceberam que a matemática alcançara seu rigor absoluto, o final de uma história que se iniciou na Grécia Antiga.

Definição 1:

Um número é dito racional quando pode ser reescrito como uma fração $\frac{p}{q}, com\ p, q \in \mathbb{Z}^*$. Detonaremos o conjunto dos Racionais por $\mathbb{Q}$.

Exemplo 1.1:

$$0{,}75 = \frac{3}{4}.$$

Definição 2:

Um número é dito irracional quando não pode ser reescrito como uma fração $\frac{p}{q}, com\ p, q \in \mathbb{Z}^*$. Note que o conjunto dos Irracionais, que denotaremos $\mathbb{I}$, é complementar ao conjunto dos números Racionais, por isso, pode também ser representado por $\mathbb{I} = \mathbb{Q}^c$.

Exemplo 2.1:

$$\frac{p}{q} \neq \sqrt{2}.$$

Definição 3:

Um número é chamado algébrico quando é solução real de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + ax + a_0 = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}, com\ i = 1,2,3, \dots, n$, que denotaremos $\overline{\mathbb{Q}}$.

Exemplo 3.1:

Sabemos que $\frac{p}{q}, com\ p, q \in \mathbb{Z}$ é um racional qualquer, vejamos que o mesmo é Algébrico.

$$\frac{p}{q} = x$$
$$p = qx$$
$$qx - p = 0$$

Logo, todo número Racional é um número Algébrico. E quanto aos Irracionais?

Exemplo 3.2:

Veremos então se $\sqrt{2}$ é algébrico.

$$\sqrt{2} = x$$
$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = (x)^2$$
$$2 = x^2$$
$$x^2 - 2 = 0$$

Assim temos que $\sqrt{2}$ é raiz do polinômio $x^2 - 2$. Assim $\sqrt{2}$ é um número Algébrico.

Brazilian Journal of Development

Exemplo 3.3:

Mostraremos que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ também é algébrico.

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} = x$$
$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = \left(x - \sqrt{2}\right)^3$$
$$3 = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 8x - 4\sqrt{2}$$
$$(x^3 + 6x - 3)^2 = \left(3\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}\right)^2$$
$$x^6 + 12x^4 - 6x^3 + 36x^2 - 36x + 9 = 18x^4 + 24x^2 + 8$$
$$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0$$

Assim $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ é raiz de um Polinômio P[x]. E, portanto, um número Algébrico.

O que nos leva a reflexão, existem números não algébricos? Suponhamos que existam esses números. Definiremos então:

Definição 4:

Todo número que não é raiz de um Polinômio P[x], logo não Algébrico, é chamado Transcendente, que denotaremos $\mathbb{T}$. Note que o conjunto dos Transcendente é complementar ao conjunto dos números Algébricos, por isso, pode também ser representado por $\mathbb{T} = \overline{\mathbb{Q}}^c$.

Poderia ao menos citar números como “e” e “pi” e um exemplo de número de Liouville.

Definição 5:

Se existir uma função bijetora entre dois conjuntos A e B, dizemos que os conjuntos têm a mesma cardinalidade e escrevemos A ~ B. Note que a relação A ~ B é uma relação de equivalência, isto é, satisfaz as propriedades:

i) A ~ A (propriedade reflexiva)

ii) Se A ~ B então B ~ A (propriedade simétrica)

iii) Se A ~ B e B ~ C então A ~ C (propriedade transitiva)

Exemplo 5.1:

Seja A = {abacaxi, banana, caqui}, B = {a, b, c} e C = {1, 2, 3}.

Note que A ~ B, pois

Brazilian Journal of Development

i) A ~ A

$$\begin{matrix} abacaxi & & abacaxi \\ banana & \rightarrow & banana \\ caqui & & \text{caqui} \end{matrix}$$

ii) A ~ B ⇒ B ~ A

$$\begin{matrix} abacaxi & & a & & a & & abacaxi \\ banana & \rightarrow & b & \Rightarrow & b & \rightarrow & banana \\ caqui & & \text{c} & & c & & \text{caqui} \end{matrix}$$

iii) A ~ B e B ~ C ⇒ A ~ C

$$\begin{matrix} abacaxi & & a & & a & & 1 & & abacaxi & & 1 \\ banana & \rightarrow & b & e & b & \rightarrow & 2 & \Rightarrow & banana & \rightarrow & 2 \\ caqui & & \text{c} & & \text{c} & & 3 & & caqui & & 3 \end{matrix}$$

Por esse motivo, se dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, dizemos que eles são equivalentes (segundo Cantor).

Isso nos traz novas perguntas. A partir desses exemplos e definições, podemos dizer que todo número Irracional é Algébrico? Existem números Irracionais Transcendentes? Os números Transcendentes têm cardinalidade maior que Algébricos? Vamos mostrar que, a primeira tem resposta negativa, mas as respostas das perguntas seguintes são positivas.

Iniciaremos demonstrando que, se realmente existirem números Transcendentes, estes são muitos. Depois mostraremos que os mesmos existem, culminando na exibição de alguns números transcendentes.

Para isso, definiremos Enumerabilidade de conjuntos numéricos.

Definição 6:

Chamaremos Enumerável um conjunto A, que seja finito ou que tenha uma bijeção com o conjunto dos naturais, ou seja, $f: \mathbb{N} \rightarrow A$.

Exemplo 6.1:

Veja que o Conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & se\ x \text{ é } par \\ \dfrac{-x+1}{2}, & se\ x \text{ é } ímpar \end{cases}$$

Brazilian Journal of Development

Assim:

$$ímpar: \quad \begin{matrix}-1\\-2\\-x\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\3\\\frac{-x+1}{2}\end{matrix}$$

$$e\ \ par: \quad \begin{matrix}1\\2\\\frac{x}{1}\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}2\\4\\\frac{x}{2}\end{matrix}$$

Fazendo assim duas bijeções, uma entre os pares de $\mathbb{Z}$ e os números positivos de $\mathbb{N}$ e uma entre os ímpares de $\mathbb{Z}$ e os números negativos de $\mathbb{N}$, o que denota a inumerabilidade desse conjunto por definição.

Exemplo 6.2:

O conjunto dos números Pares, que pode ser denotado por $2\mathbb{Z}$ também é enumerável.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{Z}$$
$$f: x \rightarrow 2x$$

Exemplo 6.3:

Sabemos que um Polinômio P[x] de grau n e com os coeficientes num domínio de integridade tem no máximo n raízes reais. Assim, é fácil ver que o conjunto das Raízes desse Polinômio P[x] é finito, e, portanto, enumerável.

Exemplo 6.4:

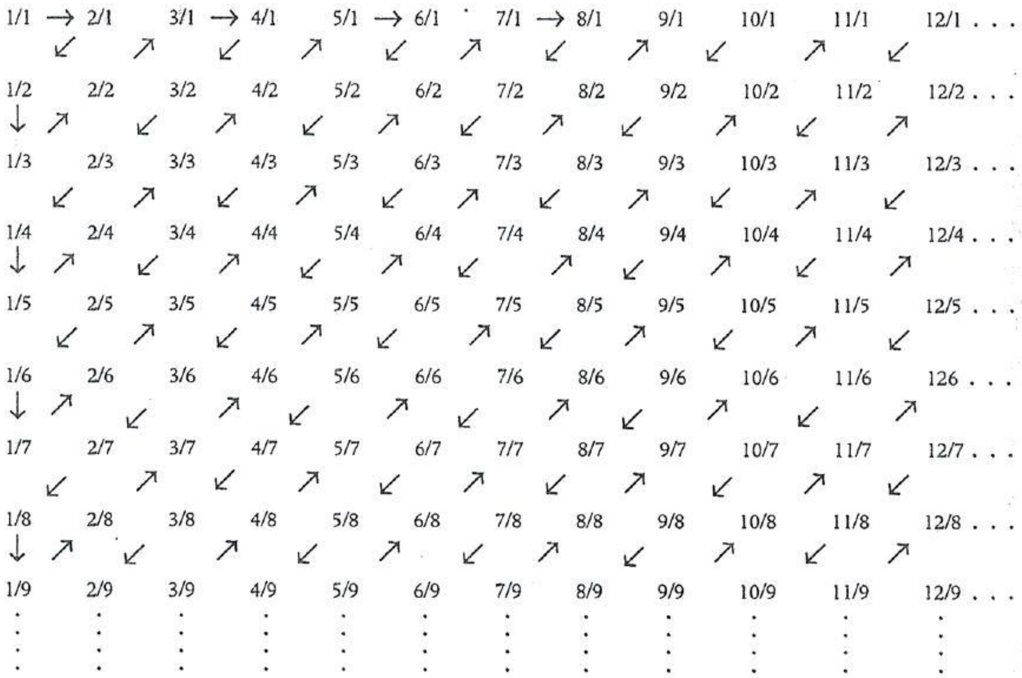
O Conjunto dos números racionais é enumerável.

A demonstração abaixo foi feita pelo matemático russo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918) e é conhecida como Diagonalização de Cantor.

Iniciamos a demonstração organizando todos os números racionais conforme a figura 1.

Brazilian Journal of Development

Figura 1 - Prova de Cantor para inumerabilidade dos racionais



Fonte: ACZEL (2003, p. 104).

Não conseguimos listar todos os números racionais por conta do tempo, que para nós é finito, porém através da diagonalização de Cantor, conseguimos escrever até qualquer número que quisermos e encontrá-los na tabela. O número 17/102, por exemplo, está na décima sétima coluna e centésima segunda linha. Listados, a dificuldade da prova consiste em estabelecer uma relação biunívoca entre os racionais e os naturais. Cantor resolveu esse problema “seguindo as setas”, assim, ele estabelece que:

$$\frac{1}{1} \to 1 \qquad \frac{2}{1} \to 2 \qquad \frac{1}{2} \to 3 \qquad \frac{3}{1} \to 4 \ \cdots \to \cdots$$

Seguindo as setas, Cantor estabelece que, sempre que passar por um número já listado, você deve ignorá-lo e associar o número natural ao próximo da lista. Como, por exemplo, $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} \to 1$, então, todas as representações de 1 deve ser associado à 1. Por esse caminho, cada número racional será associado a um número natural, assim, Cantor demonstrou que os números racionais são enumeráveis.

Exemplo 6.5:

O Conjunto dos números irracionais não é enumerável.

Feita a demonstração da enumerabilidade dos números irracionais, Cantor se perguntou se os números irracionais eram também enumeráveis.

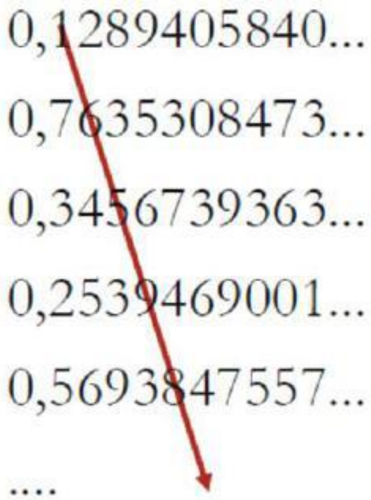
Cantor restringiu sua análise ao intervalo [0,1], pois, para compor a Reta Real e listar os números irracionais nela, basta somar um número Inteiro a qualquer número irracional do intervalo [0,1].

Exemplo 6.5.1:

35,09803... = 35 + 0,09803...
tal que, 35 pertence aos Inteiros e 0,09803... pertence ao intervalo [0,1]

Cantor partiu da hipótese que todos os números de 0 a 1 poderiam ser listados, independe da ordem, então selecionou dessa lista todas as dízimas não periódicas infinitas, os irracionais, em uma nova lista. Dessa forma, sua hipótese é equivalente a assumir que os irracionais são enumeráveis. Conforme figura 2. Então ele seleciona um número formado pela diagonal, 0.16598..., conforme na Figura 2, e criou um novo número mediante a adição de 1 a cada dígito (se o número for 9, o dígito será mudado para 0). O novo número criado,0,27609..., não está na lista acima, pois é diferente de cada número listado em, pelo menos, um dígito.

Figura 2 – Lista dos números irracionais de 0 a 1.



Fonte: BROETTO (2016, p. 70).

Assim, contradizendo sua hipótese, Cantor demonstra que o conjunto dos irracionais é não enumerável.

Brazilian Journal of Development

Teorema 1:

O conjunto dos números reais ℝ, é não enumerável.

Analogamente, listaremos todos os números deste intervalo pela sua representação decimal infinita, como por exemplo, 0,3 = 0,2999... ou 0,952 = 0,951999...

Supondo, por absurdo, que é possível enumerá-los, ordenaremos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ conforme abaixo:

$$x_1 = 0, x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} \dots$$
$$x_2 = 0, x_{21}x_{22}x_{23}x_{24} \dots$$
$$x_3 = 0, x_{31}x_{32}x_{33}x_{34} \dots$$
$$\vdots$$
$$x_n = 0, x_{n1}x_{n2}x_{n3}x_{n4} \dots$$
$$\vdots$$

onde x_{ij} são os algarismos de 0 a 9.

Usando agora a Diagonalização de Cantor, construiremos um número diferente de todos os listados. Assim, tomaremos um x_k, no qual trocaremos todos os x_{pm} por $x_{pm} + 1$, tendo então um número não listado.

Logo, não é possível, enumerar os números Reais.

Teorema 2:

A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Seja $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ conjuntos infinitos, enumeráveis e distintos, sem perda de generalidade, queremos mostrar que $A_1 \; U \; A_2 \; U \; A_3 \; U \dots U \; A_n$ é enumerável.

Note que pegamos os conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ distintos, pois, seja $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, existe um conjunto $A_{1_1} = A_1 - (A_1 \cap A_2)$, assim podemos fazer $A_k = A_{1_1} \cup A_2$, tendo assim a união de dois conjuntos disjuntos.

Vamos mostrar, por indução finita, que se $P(n)$: $A_1 U A_2 U A_3 U \dots U A_n$ é uma propriedade com a união de conjuntos enumeráveis, então $P(n+1)$: $A_1 \; U \; A_2 \; U \; A_3 \; U \dots U \; A_n \; U \; A_{n+1}$ também será enumerável. Para isso usaremos a Definição 5, mostrando que os conjuntos têm a mesma cardinalidade.

Brazilian Journal of Development

Temos que:

i) $P(2)$ é verdadeiro.

Pois, tomando $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1m}, \ldots\}$ e $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots\}$ é possível fazer uma Bijeção entre A_1 e o Números Impares e A_2 com os Números Pares, tendo assim uma bijeção ente $A_1 \cup A_2$ e os Números Naturais.

ii) $P(n+1)$ é verdadeiro.

Pois, tomando $P(n)$ Verdadeiro, sabemos que, por hipótese, $A_1\ U\ A_2\ U\ A_3\ U \ldots U\ A_n$ é enumerável, daí tomando $A_k = A_1\ U\ A_2\ U\ A_3\ U \ldots U\ A_n = \{b_{11}, b_{12}, b_{13}, \ldots, b_{1p}, \ldots\}$ e $A_{n+1} = \{a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, a_{n+1,3}, \ldots, a_{n+1,q}, \ldots\}$ é possível fazer uma Bijeção entre A_k e o Números Impares e A_{n+1} com os Números Pares, tendo assim uma bijeção ente $A_k \cup A_{n+1}$ e os Números Naturais.

Logo, temos que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, como queríamos demonstrar.

Exemplo 2.1:

O Conjunto dos números Algébricos é enumerável.

Note que o Conjunto dos Números Algébricos nada mais é que a união de todos os conjuntos das Raízes dos Polinômios P[x] de grau n e com os coeficientes num domínio de integridade. E, conforme o Teorema 2, a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Logo segue que o Conjunto dos números Algébricos é enumerável.

Voltamos então às perguntas que motivaram essa discussão:

Todo número Irracional é Algébrico?

Conforme o Teorema 2, a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, segue do Exemplo 6.5 que os irracionais são não enumeráveis, e do Exemplo 2.1 que os Algébricos são enumeráveis, logo, é matematicamente impossível que todos os números irracionais sejam algébricos.

Existem números Irracionais Transcendentes?

Como expusemos na Definição 4, $\mathbb{T} = \overline{\mathbb{Q}}^c$, logo, se existem irracionais não algébricos, por definição de completar, existem irracionais Transcendentes.

Os números Transcendentes têm cardinalidade maior que os Algébricos?

Note que o conjunto dos números algébricos é enumerável (Exemplo 2.1), e os reais são não enumeráveis (Teorema 1), cabe então que os Transcendentes são não enumeráveis, com base também no Teorema 2. Logo, o conjunto dos números Transcendentes têm cardinalidade maior que o dos Algébricos.

Agora, você deve estar se perguntando sobre a real existência dos números Transcendentes e quais são eles, tendo em vista que até então nos baseamos na hipótese de que ele existe e não apresentamos nenhum número que corresponda às características de Transcendente. Historicamente, o processo de construção não foi muito diferente da forma como decidimos construir este trabalho. Vejamos então mais um pouco sobre a história destes números.

2.2 HISTÓRIA DOS NÚMEROS TRANSCENDENTES

Euler definiu números Transcendentes no século XVII, e os reconheceu como aqueles que "transcendem" o poder das operações algébricas. Porém, não havia provas, ou exemplos desses números. Em 1844, Joseph Liouville, matemático francês, verificou a existência dos chamados Números de Liouville, que são transcendentes. Para provar a existência desses números, Liouville teve a seguinte ideia: ele encontrou uma propriedade que era satisfeita por todos os números algébricos (reais e irracionais) e assim um número que não satisfizesse tal propriedade seria, necessariamente, transcendente. Tal resultado foi chamado Teorema de Liouville. Esse é o primeiro grande resultado em Teoria dos Números Transcendentes e, sem dúvida, um grande avanço na área.

Em 1874, Cantor provou a Enumerabilidade do conjunto dos números algébricos e como consequência que o conjunto dos transcendentes é não enumerável, como mostramos acima.

Exemplos clássicos de Transcendentes são os números e e π, sendo que o primeiro teve sua transcendência provada por Hermite, em 1873, por meio da poderosa série de Taylor da função e^x. E o segundo alguns anos depois, 1884, quando Lindemann estendeu o método de Hermite para provar que e^a é transcendente, sempre que a é algébrico não nulo. Assim como consequência mais importante do Teorema de Lindemann, a transcendência de π, para a qual ele usou a belíssima identidade de Euler.

Outros exemplos são os números e^π e $e + \pi$ que ainda não temos provas se são transcendentes, dentre outros tantos que tem transcendência aparentemente natural. (OLIVEIRA e HOYOS, 2015).

Note que não cabe a proposta deste trabalho provar que tais números são Transcendentes.

3 CONCLUSÃO

Ao concluirmos, apesar do Conjunto dos números Transcendentes ser um conjunto interessante, infinitamente denso e conter a maioria dos números que estão contidos no Conjunto dos Reais, notamos que ainda existem muitas perguntas sem respostas sobre o Conjunto dos Números Transcendentes por ser um conjunto numérico recente. Ainda é um campo de estudo em aberto com vários problemas para os quais ainda não temos métodos para resolver. Sugerimos um estudo mais aprofundado dos Números de Liouville e de outros métodos desenvolvidos mais recentemente, como a constante de Champernowne.

A proposta desse trabalho foi apresentar um texto sobre identificação e construção de números irracionais e transcendentais via técnicas algébricas para que futuros professores do ensino básico possam aprofundar seus conhecimentos sobre esse tema e até mesmo conhecer melhor essas definições.

REFERENCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

ACZEL, Amir. **O mistério do alef**: a matemática, a cabala e a procura pelo infinito. São Paulo: Globo, 2003.

BALDINO, Roberto Ribeiro. **A ética de uma definição circular de número real**. Bolema, v. 9, n. 10, p. 31–52, 1994.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

BROETTO, Geraldo Claudio**. O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática.** 2016. 417 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DANTZIG, Tobias. **Number** - the language of science. 4ª ed. Nova Iorque: Pi Press, 1970.

KLINE, Morris. **Mathematical thought from ancient to modern times**. vol 1. Nova Iorque: Oxford University Press, 1972.

OLIVEIRA, Diogo de. HOYOS, Mariana Garabini Cornelissen. **Números Transcendentes: Números de Liouville e a Constante de Chapernowne.** 2015. 16 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de São João del Rei, Campus Alto Paraopeba, 2015.

POINCARÉ, Henri. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.