

Aplicação de modelos de regressão linear e não linear para estimativa de volume de biomassa e estoque de carbono**Application of linear and nonlinear regression models for biomass and carbon stock volume estimates**

DOI:10.34117/bjdv6n7-259

Recebimento dos originais: 03/06/2020

Aceitação para publicação: 13/07/2020

Elder Olinto de Moraes

Mestre em Modelagem Computacional e Sistemas pela Universidade Estadual de Montes Claros - Unimontes

Instituição: Universidade Estadual de Montes Claros – Unimontes

Endereço: Avenida Dr. Ruy Braga s/n Vila Mauricéia. Cep: 39.401-089 Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Prédio 3. Departamento de Matemática

E-mail: elder.morais@unimontes.br

Kennya de Lima Ribeiro

Mestre em Desenvolvimento Social pela Universidade Estadual de Montes Claros – Unimontes

Instituição: Instituto Federal do Norte de Minas Gerais – campus Araçuaí

Endereço: Fazenda do Meio Pé da Serra s/n BR 367, km 278. Cep 39.600-000 – Araçuaí-MG

E-mail: kennya.ribeiro@ifnmg.edu.br

Rômulo Barbosa Veloso

Doutor em Engenharia Florestal pela Universidade Federal de Lavras

Instituição: Universidade Estadual de Montes Claros - Unimontes

Endereço: Av. Coronel Lopinho, 254 Morada do Parque – Montes Claros - MG

E-mail: romulo.veloso@unimontes.br

Maria das Dores Magalhães Veloso

Doutora em Ciências Florestais pela Universidade Federal de Lavras – UFLA

Instituição: Universidade Estadual de Montes Claros – Unimontes

Endereço: Avenida Dr. Ruy Braga s/n Vila Mauricéia. Cep: 39.401-089 Centro de Ciências Biológicas, Departamento de Biologia Geral

E-mail: dora.veloso@unimontes.br

RESUMO

Em função das mudanças climáticas, estudos relacionados à vegetação de florestas plantadas ou nativas são importantes para avaliar o potencial da vegetação em reter carbono. A utilização da análise de regressão linear e não linear podem proporcionar a comparação de modelos de estimativa de volume de biomassa e estoque de carbono e oferecer parâmetros para estudos da vegetação. Os objetivos deste estudo foram quantificar o volume de biomassa e estoque de carbono de uma mata nativa, além de experimentar diferentes modelos de regressão linear e não linear de uma mata plantada. Dentre os modelos comparados observou-se um comportamento de não normalidade entre os modelos lineares, ocasionando na utilização dos modelos não lineares Logístico e Gompertz e, através da aplicação dos critérios de informação de Akaike e bayesiano constatou-se que o modelo Logístico apresentou melhor ajuste. Este trabalho contribuiu com novas informações, alternativas e sugestões para o estudo de carbono na região.

Palavras-chave: Estoque de carbono, Modelos lineares e não lineares, Análise de regressão.

ABSTRACT

Due to climate change, studies related to vegetation of planted or native forests are important to assess the potential of vegetation to retain carbon. The use of linear and nonlinear regression analysis can provide the comparison of biomass volume and carbon stock estimation models and provide parameters for vegetation studies. The objectives of this study were to quantify the biomass volume and carbon stock of a native forest, in addition to experimenting with different models of linear and nonlinear regression of a planted forest. Among the comparative models, a non-normal behavior was observed among the linear models, resulting in the use of non-linear Logistic and Gompertz models, among which, through statistical tests, the logistic model was more consistent. This work contributed with new information, alternatives and suggestions for the study of carbon in the region..

Keywords: Carbon stock, Linear and nonlinear models, Regression analysis.

1 INTRODUÇÃO

A mudança do clima é comumente chamada de aquecimento global, porque uma das consequências mais prováveis da existência de concentrações maiores de gases de efeito estufa, na atmosfera, são temperaturas médias elevadas. Percebe-se a necessidade de se buscar a diminuição das emissões antrópicas líquidas dos gases de efeito estufa, dentre eles o CO₂, pois a maior preocupação está justamente na acumulação progressiva desses gases.

Os problemas relacionados à mudança do clima que se verificam no presente, são a resposta do clima à ação do homem ocorrida a décadas. Caso não sejam tomadas medidas para limitar as emissões de gases de efeito estufa, as temperaturas médias globais aumentarão entre 0,8 a 4,5 graus Celsius nos próximos cem anos, o que é considerado um nível alto, e conseqüentemente os níveis dos mares elevar-se-ão entre 13 a 94 centímetros (PACIORNIK; MACHADO FILHO, 2000). Os cientistas não negam que a terra tenha sofrido alterações climáticas no passado, ao contrário, foram abundantes, mas nunca se registrou mudanças em um período tão curto.

Além desta teoria que se baseia na lógica aquecimentista antrópica, para alguns pesquisadores, essas emissões de gás carbônico (CO₂) geradas pelo homem não são diretamente responsáveis pelas mudanças climáticas no planeta. Sendo assim esses pesquisadores tentam provar que a terra sempre passou por ciclos de aquecimentos e resfriamentos e estes não foram causados pelo gás carbônico nem pela ação do homem. No entanto, estes mesmos cientistas atestam que é de extrema necessidade a conservação ambiental, pois ela é a responsável pela sobrevivência humana, esteja o nosso planeta aquecendo ou resfriando.

Analisando esse cenário mundial, Silva (2009) apresenta um panorama prevendo a quantidade de CO₂ antrópico que se tem de reduzir para estabilizar sua concentração na atmosfera. Essa diminuição tende a contribuir para regredir os efeitos climáticos, na visão dos cientistas que defendem

a teoria aquecimentista. Nesse intuito propõe-se criar uma ferramenta que propicie a escolha do melhor modelo dentre os mais usados e como ajudar os profissionais interessados em quantificação de carbono a escolher o melhor desses modelos.

2 SEQUESTRO DE CARBONO

Os processos conhecidos como sequestro de carbono são aqueles utilizados para sequestrar e capturar CO₂ de uma maneira ambientalmente segura. Por esse motivo existem estudos sobre a viabilidade econômica quando se considera retirar da natureza uma quantidade muito grande de CO₂ (DORAN et al. 1994). O sequestro de carbono ocorre naturalmente e pode ser através do ecossistema oceânico e terrestre. O ecossistema oceânico é responsável por ser o maior reservatório de carbono da Terra (VIEIRA et al, 2011).

O ecossistema terrestre permite a fixação de carbono tanto no solo quanto na floresta. O carbono armazenado é o balanço entre a absorção da planta, a fixação de carbono no solo e as perdas por respiração e decomposição (BAESSO et al., 2010). Ainda segundo estes autores, existem enormes quantidades de carbono que são armazenadas naturalmente nas florestas por árvores e outras plantas. Normalmente baseia-se no aumento da biomassa vegetal, ou seja, no crescimento das árvores. Isso só é possível porque a árvore no seu período de crescimento acumula glicose, a qual possui carbono na sua composição; carbono esse que estava presente na atmosfera.

Segundo Sedjo et. al (2005), uma floresta jovem, que esteja crescendo de forma acelerada, sequestra maiores volumes de carbono, quando comparada a uma floresta madura. Já uma árvore adulta não produz tanto excedente de glicose, o que ela produz é apenas um excedente de reposição. Por este motivo, há uma necessidade de se investir cada vez mais em reflorestamentos, para intensificar esse sequestro natural de carbono, principalmente em países em desenvolvimento. Cada hectare de floresta em desenvolvimento é capaz de absorver de 150 a 200 toneladas de carbono. O tronco de uma árvore é composto por cerca de 80% de carbono e uma única árvore pode ser capaz de absorver 180 quilos de CO₂.

Portanto, o desenvolvimento ou aprimoramento de modelos matemáticos para contagem de carbono se justifica para que tenhamos modelos que representem melhor a realidade estudada. Importante relatar que o sequestro de carbono natural utilizando tanto matas plantadas, quanto nativas, depende diretamente da biomassa e a mesma pode ser estimada e prognosticada através da regressão, e a análise da mesma vem validar os resultados obtidos.

3 REGRESSÃO

A regressão é um método estatístico que nos permite conhecer os efeitos que uma ou mais variáveis exercem ou não, sobre outras (PAULA, 2004). Através de uma relação matemática, podemos relacionar as variáveis e estimar valores de uma destas variáveis em função da outra.

Segundo Draper e Smith (1998), os modelos de regressão são classificados como lineares, linearizáveis e não lineares. Esta classificação é fundamentada nos conceitos de derivadas.

Os modelos lineares são aqueles que são lineares em relação aos parâmetros, ou seja, a derivada do modelo em relação aos parâmetros não depende dos parâmetros:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} f_i(X, \theta) = g(X) \quad (1)$$

Os modelos linearizáveis são aqueles que por meio de alguma transformação, tornam-se lineares (Eq. 2).

$$Y = \theta^x \varepsilon \quad (2)$$

Os Modelos Não Lineares são modelos em que pelo menos uma das derivadas parciais depende de algum parâmetro do modelo

$$Y = \theta_0 + \theta_1^x + \varepsilon \quad (3)$$

Segundo Correa et al. (2010) a regressão Linear e Não Linear tem sido o mecanismo que possibilita os pesquisadores verificação de problemas em diversas áreas do conhecimento. Destacando-se a modelagem estatística de regressão linear ou não linear, na aplicação e utilização das novas tecnologias computacionais.

A análise de dados sobre crescimento é importante em muitas áreas da pesquisa, mas em biologia principalmente há um grande interesse em modelar crescimento de animais e plantas. E hoje com o mercado de estoque de carbono, se tornou cada vez mais importante encontrar um modelo que melhor representasse a área em estudo, pois há grandes investidores interessados em comprar esse estoque de carbono, principalmente para atender os acordos internacionais de redução de GEE (SEBER e WILD 2003),

Para modelar esse tipo de comportamento, podemos verificar vários modelos na literatura que poderia nos atender, mas Seber e Wild (2003) relatam que alguns deles, como o Modelo Logístico e

o Modelo Gompertz têm sido escolhidos por diversos pesquisadores, principalmente os agrônomos, pois eles tem uma característica de melhor descrever os rendimentos de uma planta.

Quadro 01: Modelos não lineares

Modelo	Função
Logístico	$f(x) = \alpha / [1 + e^{(\beta - \gamma x)}]$
Gompertz	$f(x) = \alpha e^{-e^{(\beta - \gamma x)}}$

De acordo com Prudente (2009), nesses modelos o parâmetro α é o valor máximo esperado para a resposta, ou assíntota, o parâmetro β está relacionado com o intercepto, isto é, o valor de $\mu = E(y)$ correspondente a $x = 0$ parâmetro γ está relacionado com a taxa média de crescimento da curva e, finalmente, o parâmetro δ , que aparece em alguns modelos, é utilizado para aumentar a flexibilidade dos mesmos no ajuste dos dados.

Nesta análise, os modelos foram reescritos, substituindo α , β e γ por θ_1 , θ_2 e θ_3 respectivamente.

São medidas de desempenho importantes o Critério de Informação de Akaike e o Bayseano, que permitem a comparação entre os modelos utilizados

O Critério de Informação de Akaike

O critério de informação de Akaike (AIC) é uma estatística que se utiliza como medida de comparação da qualidade de ajuste do modelo baseado no logaritmo da função de máxima verossimilhança, sendo dependente do número de parâmetros do modelo em estudo (AKAIKE, 1974).

A estimativa de Akaike é dada pela fórmula $AIC = -2 \log L(\theta) + 2k$

$\log L(\theta)$: é o logaritmo da função de máxima verossimilhança

k : é o número de parâmetros do modelo

Segundo Souza (2012), o Critério de Informação de Akaike (AIC) admite a existência de um modelo real que descreve os dados que são desconhecidos, e tenta escolher dentre um grupo de modelos avaliados, o que minimiza a divergência de Kullback-Leibler (k-L). Esta divergência está relacionada à informação perdida por ser usado um modelo aproximado e não real.

O AIC é normalmente utilizado para equiparar modelos não alinhados e o melhor modelo, considerando o ajuste, será o que apresentar menor valor.

O Critério de Informação Bayesiano (BIC)

O Critério de Informação Bayesiano (BIC), também chamado de critério de Schwarz, foi proposto por Schwarz (1978) e consiste em um critério de avaliação de modelo definido em termos da probabilidade a posteriori.

O BIC tem como pressuposto a existência de um “modelo verdadeiro” que descreve a relação entre a variável dependente e as diversas variáveis explanatórias entre os diversos modelos sobre seleção. Assim, o critério é definido como a estatística que maximiza a probabilidade de se identificar o verdadeiro modelo entre os avaliados.

O valor do BIC é dado por: $BIC_p = -2\log(L_p) + [(p+1)+1]\log(n)$

Onde L_p é a função de máxima verossimilhança do modelo “ p ” é o número de variáveis explicativas consideradas do modelo. O modelo com menor BIC é o modelo de melhor ajuste.

4 METODOLOGIA DE APLICAÇÃO DE MODELOS DE REGRESSÃO

Foram utilizados 920 indivíduos da espécie *Eucalyptus grandis* os quais tiveram mensurados a altura total e o diâmetro a 30cm do solo. As alturas foram medidas com o uso de hipsômetro digital e os diâmetros através de suta.

Foram utilizados modelos de regressão Linear e Não Linear, correlacionando as variáveis diretamente ligadas ao processo de contagem de carbono, as quais temos: o volume como a variável resposta ou dependente, e as variáveis Altura e Diâmetro como as variáveis explicativas ou independentes.

Inicialmente escolhemos três modelos lineares e dois modelos não lineares e todos foram submetidos a regressão linear para ajuste dos dados. Os não lineares foram linearizados.

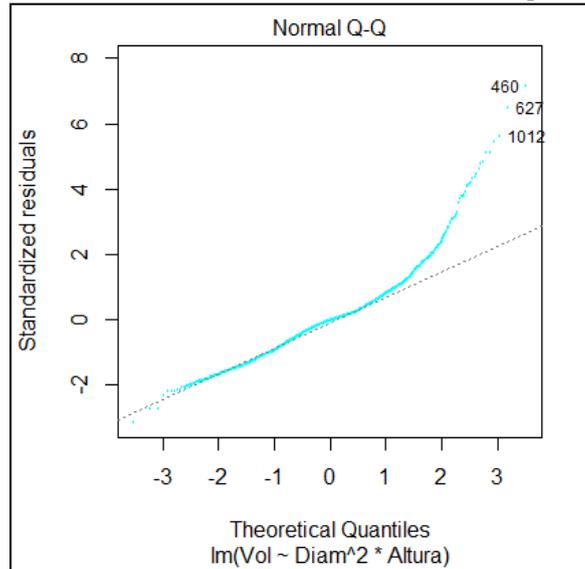
O primeiro modelo trabalhado foi o modelo da variável combinada de Spurr dado por

$$Y = \beta_0 + \beta_1(Db^2 \cdot Ht) + \varepsilon \quad (4)$$

Onde: β_0 e β_1 são os parâmetros a serem estimados, Y=Volume, Db= diâmetro basal, Ht – altura.

A verificação da normalidade ocorreu pelo uso do gráfico Quantil-Quantil (QQ), que verifica se dois conjuntos de dados são oriundos de uma distribuição comum, e neste caso foi comparado com os quantis da distribuição normal, conforme o Gráf.1 verificou-se a não normalidade. O teste Shapiro Wilks que testa a hipótese nula de que uma amostra retirada de uma população tem distribuição normal foi utilizado e apresentou um p valor de 0,000000248 indicando a não normalidade dos dados.

Gráfico 1: Gráfico de resíduos – Modelo de Spurr

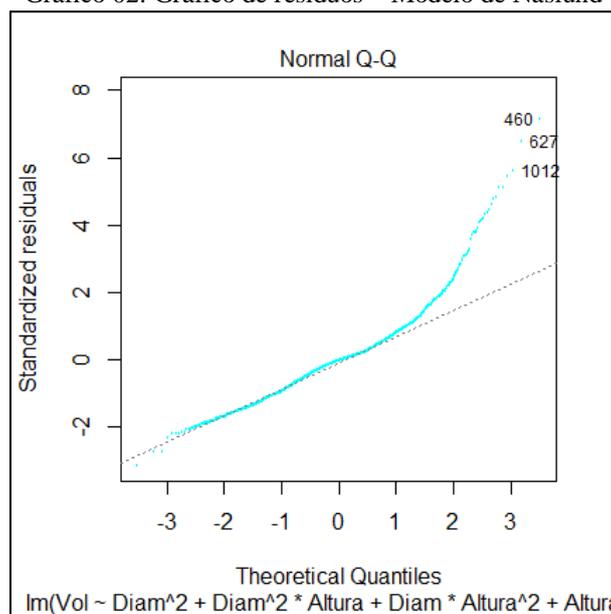


Também foi ajustado o modelo de Naslund dado por

$$Y = \beta_1 Db^2 + \beta_2 Db^2 Ht + \beta_3 DbHt^2 + \beta_4 Ht^2 + \varepsilon \quad (5)$$

onde β_1 , β_2 , β_3 e β_4 são os parâmetros a serem estimados e as demais variáveis com o mesmo significado dado para o modelo. Rejeitou-se a hipótese de normalidade ao se obter um p valor de 0,000000248, no teste Shapiro Wilks sendo também reforçado pela análise de resíduos pelo gráfico QQ do Gráf. 2.

Gráfico 02: Gráfico de resíduos – Modelo de Naslund



Verificou-se ainda os seguintes valores da estatística de teste para o teste Shapiro Wilks com os seguintes modelos

Modelo de Ogaya	- $Y = Db^2(\beta_0 + \beta_1 Ht) + \varepsilon$	estatística - 0,92878
Modelo de Schumacher e Hall	- $Y = \beta_0 Db^{\beta_1} Ht^{\beta_2} \cdot \varepsilon$	estatística - 0,92878
Modelo Logaritmo de Spurr	- $Y = \beta_0 (Db^2 Ht)^{\beta_1}$	estatística - 0,93779

Todos apresentando não normalidade segundo o teste usado e corroborados pela análise de resíduos. Devido a todos os modelos terem apresentado evidências de não normalidade, optou-se por fazer algumas transformações nas variáveis.

Foram efetuadas as transformações logarítmicas nas variáveis volume, diâmetro e altura e, logo após a transformação logarítmica, foi realizada a análise de regressão de todos os modelos testados e novamente todos foram submetidos ao teste de normalidade Shapiro-Wilk, no qual, os modelos apresentaram um p-valor abaixo de 0,05, o que também evidenciou a não normalidade dos dados, o que se repetiu com a transformação da raiz quadrada.

Diante do recomendado pela literatura foi aplicada a transformação de Box-Cox para obtermos essa normalidade. Considerando X_1, \dots, X_n os dados originais, a transformação de Box-Cox consiste em encontrar um λ tal que os dados transformados Y_1, \dots, Y_n se aproximem de uma distribuição normal. Não se obteve valor de λ que resultasse em normalidade com aplicação da transformação de Box Cox optou-se então pelo uso de modelos não lineares.

Precisamos então, encontrar uma estimativa para o parâmetro de transformação λ . Uma das formas de estimar λ é utilizando o método de máxima verossimilhança. Fez-se a transformada de Box-Cox para cada modelo, procedeu-se em seguida com as regressões lineares e logo após foi aplicado o teste de Shapiro-Wilk para verificar a normalidade de todos os modelos. Percebe-se que a não normalidade dos dados persistiu, pois todos os p-valores ficaram menores que $2.2e-16$, ou seja, apresentaram não normalidade.

Modelo Logístico e Modelo de Gompertz

Conforme descrito na literatura, para analisar os modelos não lineares em que há heteroscedasticidade residual, utilizamos a estimação dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados generalizados (MQG), onde as estimativas obtidas por este método para os parâmetros θ são aquelas que minimizam a soma dos quadrados dos erros. Para encontrar os estimadores que geram essas estimativas, deriva-se cada elemento do vetor θ e iguala a zero obtendo o vetor de equações normais.

Como os estimadores gerados não apresentam forma analítica, usamos o método iterativo de Gauss-Newton para a sua solução. Para este processo também é necessário fazer uma estimativa inicial e ela precisa ser bem definida para evitar que o algoritmo convirja para um máximo local ao invés de um máximo global.

Existem várias técnicas utilizadas para esta estimativa (chute) inicial descrita neste trabalho, mas optamos por utilizar os critérios definidos por Ratkowsk (1983), onde ele define esses valores iniciais mais adequados para cada um dos modelos não lineares utilizados.

No software R, essa regressão não linear por MQG pode ser ajustada através da função `gnls()` do pacote `nlme`. No script dos modelos Logístico e Gompertz, com o objetivo de retratar a realidade dos dados, foi utilizada a função `Weigts=VarPower` (poder de variância) para modelar a heteroscedasticidade e aplicação do modelo auto regressivo de ordem 1, para correlação dos resíduos.

Para o modelo Logístico dado por:

$$y = \theta_1 / [1 + \exp(\theta_2 + \theta_3 * x)] \quad (6)$$

Segundo Thomas (2016), para encontrar as estimativas iniciais para este modelo, utilizou-se a técnica da linearização, visto que o modelo logístico é linearizável utilizando os seguintes passos.

$$y = \frac{\theta_1}{1 + e^{-(\theta_2 + \theta_3 x)}} \quad (7)$$

$$\frac{y}{\theta_1} = \frac{1}{1 + e^{-(\theta_2 + \theta_3 x)}} \quad (8)$$

$$\log \left[\frac{y/\theta_1}{1 - y/\theta_1} \right] = \theta_2 + \theta_3 x \quad (9)$$

A primeira das três equações acima é o modelo logístico tradicional de três parâmetros. Na segunda equação todos os termos foram divididos por θ_1 . Como θ_1 é assíntota do modelo logístico, tem-se que o lado esquerdo da segunda equação é um número entre $[0,1]$. Analisando a terceira equação realizou-se a transformação logito, muito utilizada como função de ligação em modelos lineares generalizados como resposta binomial, tornando o modelo linear em θ_2 e θ_3 .

Sendo assim, de posse de uma estimativa inicial para o parâmetro θ_1 , pode-se obter estimativas iniciais para os demais através de uma regressão linear. As estimativas dos respectivos parâmetros ficaram assim definidas $\theta_1 = 28.9280$, $\theta_2 = 45.4137$ e $\theta_3 = 0.1257$.

Utilizando o software “R” na sua função `gnls()` pode-se ajustar o modelo não linear, de onde pode-se observar que a estimativa máxima para a nossa função é de 27,692126.

Fórmula: $y \sim \theta_1 / (1 + \theta_2 * \exp(-\theta_3 * x))$

Quadro 02: Parâmetros Modelo Logístico

Parâmetros				
	Estimativas	Erro padrão	t	Valor p
Theta1	27.692126	0.292573	94.65	<2e-16
Theta2	9.515584	0.150103	63.39	<2e-16
Theta3	0.123858	0.002037	60.80	<2e-16

Para análises comparativas entre modelos, calculamos os índices AIC e o BIC.

$$AIC = 7.152,57$$

$$BIC = 7.165,27$$

Para o modelo de Gompertz dado por :

$$y = \theta_1 e^{-e^{(\theta_2 - \theta_3 x)}} \quad (10)$$

Pelos critérios definidos por Ratkowsky (1983), optamos neste modelo seguir o recomendado para as estimativas iniciais dos parâmetros, sendo assim ficaram definidos:

$$\theta_1 = 0.894, \theta_2 = 0.602 \text{ e } \theta_3 = 0.428$$

Utilizamos novamente o software “R” para ajustar o nosso modelo não linear. Para fazermos a comparação de modelos, foram calculados os índices AIC e BIC.

$$AIC = 7.168,507$$

$$BIC = 7.197,247$$

Para escolher o melhor modelo, adotamos aquele que aparece menor índice AIC, onde temos o modelo Logístico como o que melhor representa a base de dados de mata plantada.

5 CONCLUSÃO

Para a área plantada estudada, foi realizada uma comparação de modelos lineares para a estimativa de biomassa e carbono, os quais não se mostraram adequados, pois apresentaram uma não normalidade dos dados. Diante disso, foram executadas as devidas transformações nas variáveis para solucionar este problema (transformada da raiz quadrada, transformada logarítmica e a transformação de Box-Cox) e mesmo assim continuaram apresentando a não normalidade dos dados.

Com a impossibilidade de utilização de modelos lineares e linearizáveis, foram comparados outros dois modelos não lineares: o modelo Logístico e o modelo de Gompertz. Para estes modelos, diante da geração dos critérios de informações de AIC e BIC, concluiu-se que o primeiro modelo mostrou melhor ajuste e, portanto, o mais adequado para estimativa de volume de biomassa e estoque de carbono para a área plantada.

A espécie estudada foi o *Eucalyptus grandis*, cujo o volume apresentou uma curva sigmoidal, portanto a técnica utilizada aplica-se a qualquer espécie arbórea cujo volume tenha uma representação por curvas sigmoidais.

REFERÊNCIAS

- Akaike, H. A new look at the statistical model identification. IEEE Transactions on Automatic Control, Boston, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.
- Baesso R. C., et al. Impacto das mudanças climáticas na produtividade do eucalipto na região Norte do Espírito Santo e Sul da Bahia. Ciência Florestal, Santa Maria, v. 20, n. 2, p. 335-344, 2010.
- Box, G. E. P.; Cox, D. R. An analysis of transformations. Journal of Royal Statistical Society B, London, v.26, p.211-243, 1964
- Corrêa, P. C. et al. Modelagem matemática e determinação das propriedades termodinâmicas do café (*Coffea arabica* L.) durante o processo de secagem. Ceres, v. 57, n.5, p. 595-601, 2010.
- Doran, J.W. et al. Defining and assessing soil quality. In: DORAN, J.W.; COLEMAN, D.F.; BEZDICEK, D.F. & STEWART, B.A., eds. Defining soil quality for a sustainable environment. 2.ed. Madison, Soil Science Society of America, 1994. p.3-22.
- Draper, N. R.; Smith, H. Applied regression analysis. 3rd ed. New York: J. Wiley, 1998. 706 p.
- Hoffman, R; Vieira, S. Análise de Regressão: Uma Introdução a Econometria. 2.ed. São Paulo: Hucitec. 1977. 379 p.
- Paciornik, N.; Machado Filho, H. Política e Instrumentos Legais Internacionais da Convenção Quadro das Nações Unidas sobre Mudança do Clima. In: SCHWARTZMAN, S; MOREIRA, A G.. As mudanças Climáticas Globais e os 79 Ecossistemas Brasileiros. Brasília 2000.
- Paula, G. A. Modelos de regressão com apoio computacional. São Paulo: IME-USP, 2004. 245 p.
- Prudente, A.A. Modelos não-Lineares de regressão: Alguns aspectos de teoria assintótica – 2009.
- Ratkowski, D. A. Nonlinear regression modeling: a unified practical approach. New York: M. Dekker, 1983. 153 p.
- Seber, G. A. F. & Wild, C. J. Sons, J. W. &. Nonlinear Regression. John Wiley & Sons, 2003.
- Sedjo, R., et al. Estimating Carbon Supply Curves for Global Forests and Other Land Uses. Resources for the future. Washington, p. 1 – 19. 2005.
- SILVA, P. Carneiro da. Mapeamento, In: Carbonatação de Basalto para armazenamento de carbono. 2007, 1-68, (Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia de Materiais), Faculdade de Engenharia, Física e Química, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimensional of a model. Annals of Statistics, Hayward, v.6, n.2, p.461-464, Mar. 1978.

Veloso, Romulo Barbosa. Proposta de um modelo não linear de crescimento e produtividade florestal. (Tese) – Lavras: UFLA, 2012.

Vieira, S. A., et al. Quantificação de Carbono Estocado em Reflorestamento Heterogêneo de Mata Ciliar aos 8 anos de idade em domínio de Mata Atlântica no Estado de São Paulo. Instituto Pró-Terra. Jaú - SP, 2011. Disponível na internet: <http://www.institutoproterra.org.br/attach/upload/artigocarbono2011.pdf>.