

Modelo predador-presa: estudo por simulação Monte Carlo**Predator-prey model: study by Monte Carlo simulation**

Recebimento dos originais: 03/12/2018

Aceitação para publicação: 07/01/2019

Tiago Ventura Rodrigues Lima

Graduando em Licenciatura em Ciências Biológicas pelo Instituto Federal de São Paulo – *Câmpus* Barretos

Instituição: Instituto Federal de São Paulo – *Câmpus* Barretos

Endereço: Avenida C-1, 250 – Bairro Ide Daher

CEP 14781-502 – Barretos – SP, Brasil

E-mail: tiagoventura01@hotmail.com

Oswaldo Eduardo Aiélo

Doutor em Ciências pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo

Instituição: Instituto Federal de São Paulo - *Câmpus* Barretos

Endereço: Avenida C-1, 250 – Bairro Ide Daher

CEP 14781-502 – Barretos – SP, Brasil

E-mail: aiello@ifsp.edu.br

RESUMO

A modelagem matemática do sistema predador-presa descreve a interação entre presa e predador, por meio, de um conjunto de equações diferenciais, entretanto, tais equações apresentam limitações, pois elas não descrevem fielmente as complexas relações observadas na natureza, portanto, para minimizar essas limitações este trabalho apresenta a proposta de inserção da estocasticidade ao modelo, por meio da simulação Monte Carlo, com intuito de obter resultados da interação predador-presa mais próximas das observadas na natureza.

Palavras-Chave: Modelo predador-presa, dinâmica estocástica; dinâmica populacional; método Monte Carlo, Monte Carlo dinâmico.

ABSTRACT

The mathematical modeling of the predator-prey system describes an interaction between prey and predator, through a set of differential equations, between such equations, their limitations, as they do not faithfully describe how complex relationships observed in nature, therefore, to minimize the estimates of this work present a proposal of insertion of the thrust, through the Monte Carlo simulation, in order to obtain results of the predator-prey interaction closer to the observations in nature.

Keywords: Predator-prey model; stochastic dynamics; population dynamics, Monte Carlo Method, Dynamical Monte Carlo.

1 INTRODUÇÃO

O modelo de Lotka-Volterra [9,15] descreve a interação entre duas espécies, onde uma espécie y (predadores) se alimenta de outra x (presas), e a x se alimenta de outro tipo de comida. Tradicionalmente essa dinâmica competitiva das populações de predadores e presas em um sistema ecológico é analisada a partir de modelos deterministas representados por equações diferenciais [3,4, 5]. Uma descrição mais detalhada (microscópica) deste sistema pode ser realizada com a introdução de modelos nos quais a população é discreta e os processos são estocásticos [6,7]. Tais modelos não descrevem completamente as complexas relações existentes na natureza, entretanto, representam um primeiro passo para entender os complexos fenômenos de interação que acontece na natureza. Por exemplo, podem ser uma importante ferramenta para o manejo integrado de pragas, principalmente no que diz a respeito das interações entre pragas e inimigos naturais em programas de controle de biológico [3,4].

2 MÉTODO MONTE CARLO

Na Física, a versão mais disseminada do método Monte Carlo é devida a *Metropolis et al* [10] (algoritmo de Metropolis) e consiste em realizar um “passeio aleatório” visitando somente as configurações mais importantes do sistema. *Metropolis et al*, introduziram a ideia de usar uma cadeia de *Markov* [14] para representar o análogo probabilista da trajetória gerada por equações de movimento. O que se precisa especificar são as probabilidades de transição T_{ij} do estado i para o estado j . Supondo que as probabilidades de transição estejam especificadas e os estados gerados, a evolução das probabilidades com as quais os estados estão distribuídos pode ser descrita pela equação Mestra:

$$dP_i(t)/dt = \sum_j w_{j \rightarrow i} P_j - \sum_j w_{i \rightarrow j} P_i \quad (1)$$

em que $P_i(t)$ é a probabilidade de encontrar o sistema no estado i no tempo t , o primeiro termo a direita descreve a taxa de todas as transições “chegando” ao estado considerado (aumentando a sua probabilidade), enquanto que o segundo termo descreve a taxa de todas transições “saindo” no estado considerado (diminuindo a sua probabilidade). As taxas de transição estão relacionadas às probabilidades de transição T_{ij} pela expressão: $w_{i \rightarrow j} = T_{ij}/\tau_i$, sendo τ_i o tempo característico de permanência no estado i . A solução estacionária para a equação Mestra fornece:

$$\sum_j w_{j \rightarrow i} P_j = \sum_j w_{i \rightarrow j} P_i . \quad (2)$$

Outra restrição mais forte do que esta pode ser imposta exigindo que a condição do balanço detalhado ($w_{j \rightarrow i} P_j = w_{i \rightarrow j} P_i$) seja obedecida. O balanço detalhado é condição suficiente, mas não

necessária para que a cadeia de Markov convirja para a distribuição desejada. Deste modo, há uma considerável liberdade para a escolha das probabilidades de transição já que $T_{ij}/T_{ji} = w_{j \rightarrow i}/w_{i \rightarrow j} = P_j/P_i$ pois podemos considerar $\tau_j = \tau_i$. Assim, dada a fórmula para T_{ij} , observa-se que o algoritmo de Metropolis gera uma trajetória de acordo com a distribuição canônica de Boltzmann. A amostragem de Metropolis gera uma sequência convergente para a região de equilíbrio do sistema [13].

3 MONTE CARLO DINÂMICO

Para que o método Monte Carlo simule a dinâmica das populações de predadores e presas duas condições adicionais devem ser impostas: determinar a sequência dos estados gerados na simulação (hierarquia) e estabelecer a relação entre “passo Monte Carlo” e tempo real [8].

Para refletir apropriadamente a hierarquia dos estados da evolução temporal longe do equilíbrio, as probabilidades de transição empregadas para cada evento devem considerar os valores relativos das taxas de transição. A hierarquia é obtida tomando-se para um dado evento α a probabilidade de transição T_α conforme a equação:

$$T_\alpha = w_\alpha / x_{max} \quad (3)$$

x_{max} é a maior das probabilidades de transição envolvidas na escolha. Assim, cada tentativa tem seu peso estatístico determinado pelas taxas de transição estabelecendo uma sequência hierárquica dos eventos.

Quanto a segunda condição devemos lembrar que nas simulações tradicionais Monte Carlo o tempo é contado em “passos” (passos Monte Carlo) e não refletem o tempo real entre os eventos da evolução fora do equilíbrio um vez que os eventos não estão equidistantes temporalmente. FICHTORN e WEINBERG [8] consideram os tempos de espera em cada estado como uma variável aleatória com distribuição poissoniana. Entretanto, este procedimento exige que os eventos sejam independentes (processo de Poisson) restringindo a utilização da técnica. AIELLO e DASILVA [1,2] utilizaram a equação Mestra para descrever a evolução temporal de uma grandeza física mesoscópica $A(t)$ como sendo:

$$dA(t)/dt = r^+ A^\dagger(t) - r^- A(t) \quad (4)$$

Os símbolos “+” e “-” significam respectivamente as contribuições para o acréscimo e para o decréscimo da quantidade $A(t)$. Sendo $r^+ = \langle w_{j \rightarrow i} \rangle$ e $r^- = \langle w_{i \rightarrow j} \rangle$ funções do tempo ou constantes. $A^\dagger(t)$ representa a fonte para a grandeza $A(t)$. Com isso os tempos de espera para a ocorrência de um

evento que, como na simulação, altera a quantidade $A(t)$ de uma unidade em qualquer processo markoviano pode ser tomado como:

$$\Delta t = 1/r^+ A^{\dagger} \quad \text{ou} \quad \Delta t = 1/r^- A, \quad (5)$$

respectivamente se ocorre um acréscimo ou um decréscimo na grandeza $A(t)$. Assim, uma vez preenchidos os dois quesitos descritos aqui, podemos construir um algoritmo para a simulação Monte Carlo que reflita adequadamente a evolução temporal real do sistema.

4 APLICAÇÃO DO MÉTODO MONTE CARLO DINÂMICO AO MODELO PREDADOR-PRESA

O modelo predador-presa [6,9] pode ser definido a partir das equações diferenciais deterministas:

$$\begin{aligned} dX/dt &= a X + \beta XY \\ dY/dt &= \gamma XY - \delta Y \end{aligned} \quad (6)$$

X e Y são as densidades da população de presas e predadores respectivamente, a é a taxa de crescimento da população de presas, δ é a taxa de mortalidade de predadores, β é a taxa de decréscimo de presas devido ao encontro com predadores e γ é a taxa de crescimento populacional do número de predadores devido a predação.

Para realizar as simulações Monte Carlo estabelecemos o modelo em uma rede quadrada de tamanho $N \times N$ (matriz com N linhas e N colunas) definindo os seguintes estados possíveis para o sistema: 0 para um sítio vazio, 1 para um sítio ocupado por uma presa, 2 para um sítio ocupado por um predador. O esquema geral para a simulação Monte Carlo dinâmico, uma vez definidas as taxas de transição, deve seguir os seguintes passos:

- a) Gera-se a configuração inicial (representada pelos números 0 , 1 e 2 conforme o sítio esteja vazio, seja uma presa ou um predador respectivamente).
- b) Escolhe-se aleatoriamente um sítio e verifica-se o seu estado;
 - ⊕ Se o sítio estiver vazio, poderá ser ocupado por uma presa (nascimento de presas) como segue:
 - i) Determina-se a probabilidade de transição T_{ij} dada pela equação (3).
 - ii) Sorteia-se um número aleatório ζ com distribuição uniforme entre 0 e 1 .

iii) Se $T > \xi$ a nova configuração é aceita. O tempo é atualizado de acordo com as equações (5).

iv) O número de presas é acrescido em uma unidade.

⊕ Se o sitio estiver ocupado por uma presa, poderá ser alterado para predador (predação), seguindo os mesmos passos i), ii) e iii).

iv) O número de presas é diminuído de uma unidade e o de predadores é acrescido de uma unidade.

⊕ Se o sitio estiver ocupado por um predador, poderá ser alterado para vazio (morte de predador), seguindo os mesmos passos i), ii) e iii).

iv) O número de predadores é diminuído de uma unidade e o número de vazios aumenta de uma unidade.

c) A simulação continua a partir de b).

Uma observação a ser feita é que as taxas de transição podem ser extraídas de modelos deterministas ou estocásticos ou ainda obtidas de dados experimentais. Assim, temos os ingredientes básicos necessários para realizar as simulações Monte Carlo e obter o comportamento dinâmico do modelo predador-presa.

Para podermos realizar o algoritmo descrito acima e assim realizarmos a simulação Monte Carlo para o sistema predador-presa, precisamos reformular as equações (6) de forma que os três estados (vazio 0, presa 1 e predador 2) estejam nelas definidos, assim fizemos:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(\frac{xa}{Nv} \right) Nv - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \beta xy - cy \\ \frac{dNv}{dt} &= cy - \left(\frac{xa}{Nv} \right) Nv\end{aligned}\quad (7)$$

Nas quais, x , y e N_v , representam, respectivamente, o número de **presas**, **predadores** e **vazios** sobre a rede $N \times N$. Observamos ainda que um requisito necessário para a realização em nossas simulações é que o número total de elementos $N_T = x + y + N_v$ se conserve durante todo o procedimento. Ainda com relação ao conjunto de equações iniciais, fizemos, por simplicidade $a = \delta$ e $\beta = \gamma$.

As taxas agora podem ser estabelecidas diretamente das equações (7), uma vez que a fonte para o nascimento de presas (aumento em x) é fornecida pelo número de vazios (N_v) na rede, podemos ver da primeira das equações (7), que $r^+ = xa/Nv$, e $r^- = \beta y$. Com o mesmo raciocínio, as taxas de acréscimo e decréscimo do número de predadores foram obtidas a partir da segunda equação acima e são dadas por: $r^+ = \beta y$ e $r^- = c$.

Portanto, em cada passo da simulação devem ser calculadas as probabilidades de transição de acordo com as equações (7).

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir das equações (7), a simulação pôde ser iniciada de acordo com os passos descritos acima. A configuração inicial foi gerada em uma rede contendo 10^4 sítios (uma matriz quadrada 100×100), dos quais 4×10^3 predadores e 2000 presas. Os resultados obtidos das simulações Monte Carlo (Estocásticos) foram confrontados com os cálculos numéricos obtidos para o conjunto de equações (7) através do método Runge-Kutta de 4ª ordem (determinista ou não-estocástico). O tempo está medido em unidades arbitrárias uma vez que não há compromisso com uma unidade particular de tempo definida nas equações.

A figura 1 mostra a comparação entre os resultados da simulação Monte Carlo (a) com o resultado obtido por Runge-Kutta (b), da evolução temporal das populações de predadores e presas das equações (7). Os resultados mostram que o método Monte Carlo pode simular variações nas amplitudes e na periodicidade das populações de predadores e de presas o que não aparece nos resultados numéricos obtidos por Runge-Kutta no qual a amplitude e o período permanecem constantes. Estas variações de amplitude são frequentes na interação predador-presa de populações de diversas espécies encontradas na natureza, sugerindo que devem ser melhor representadas por modelos estocásticos.

A figura 2 mostra o espaço de fases para o modelo predador-presa definido pelas equações (7). Em (a) a solução obtida por Monte Carlo mostra que o sistema pode, a partir das flutuações estocásticas sair da órbita inicial e atingir outros estados muito distantes. Em (b) a solução Runge-Kutta mostra que a órbita inicial permanece a mesma mesmo ao longo de muito tempo, somente repetindo os mesmos estados da primeira trajetória fechada.

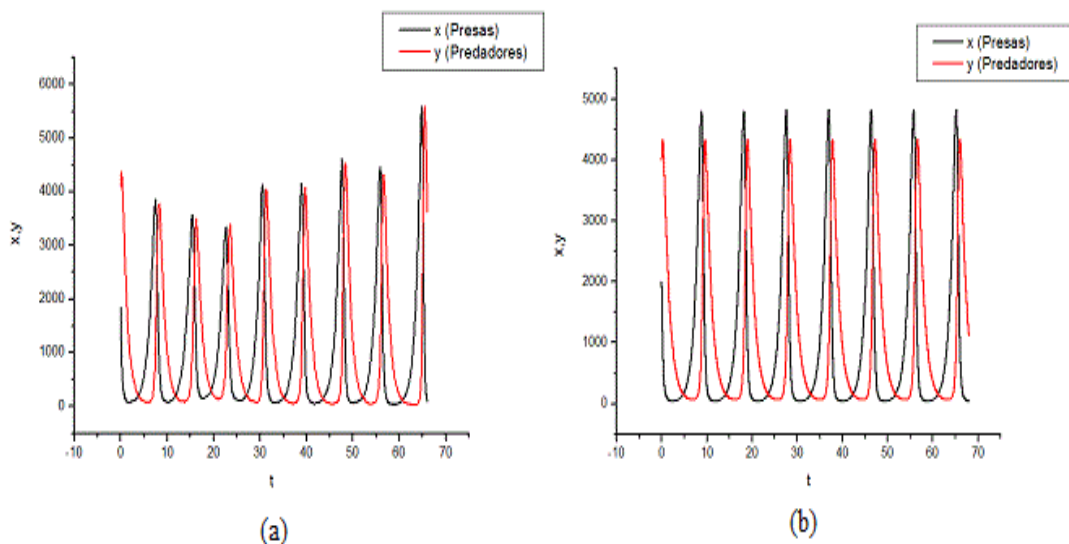


FIGURA 1. (a) Oscilações das populações de predadores y (linha vermelha) e presas x (linha preta) obtidas como soluções das equações (7) partir das simulações Monte Carlo (resultados estocásticos); (b) Oscilações das populações de predadores y (linha vermelha) e presas x (linha preta) obtidas como soluções das equações (7) a partir pelo método Runge-Kutta (não estocástico).

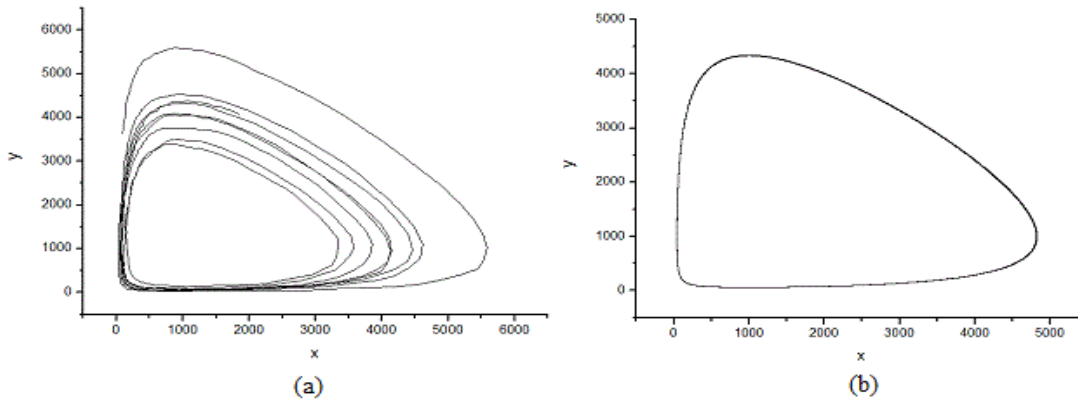


FIGURA 2. Espaço de fases para os parâmetros x (presas) e y (predadores) (a) Orbitas com raios diferentes devido a flutuações típicas de modelos estocásticos; (b) Orbitas fechadas com raios iguais em torno de um ponto de equilíbrio típicas de sistemas deterministas (não-estocásticos).

6 CONCLUSÕES

Comparando os resultados obtidos da simulação Monte Carlo (método estocástico) com os resultados obtidos pelo método numérico Runge-Kutta (método determinista), podemos concluir que o primeiro oferece um conjunto maior de possibilidades de trajetórias para as soluções das equações para o modelo predador-presa (7). A diversidade de soluções que podem ser obtidas por Monte Carlo podem representar, de maneira mais realista, os fenômenos que ocorrem na natureza. Particularmente, o método Monte Carlo pode simular flutuações nas amplitudes das populações que podem levar à extinção das espécies envolvidas [11,12]. Podem também nos mostrar caminhos para evitar a extinção de espécies uma vez que pode nos fornecer os limites de flutuações que uma população pode estar sujeita sem que seja ameaçada de extinção.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Prof. Dr. Flávio Henrique Sant'Ana Costa pelas inúmeras frutíferas discussões.

REFERÊNCIAS

AIELLO, O. E.; da Silva, M. A. A. New approach to dynamical Monte Carlo methods: application to an epidemic model. *Physica A*, v. 327, p. 525–534, 2003.

AIELLO, O. E. et al. Solution of deterministic-stochastic epidemic models by dynamical Monte Carlo method. *Physica A*, v. 282, p. 546–558, 2000.

BATTEL, A. P. M. B; MORAL, R. A; GODOY, W. A. C. Modelos matemáticos predador-presa e aplicações ao manejo integrado de pragas. *Oecologia Australis*, Vol. 16, p. 43-62, 2012.

BEGON, M; HARPER, J. L; TOWNSEND, C. R. *Ecologia: de indivíduos a ecossistemas*. Editora Artmed: Porto Alegre, 2007.

BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC editora: Rio de Janeiro, 2006.

CAMPILLO, F. ; LOBRY , C. Effect of population size in a predator-prey model. *Ecological Modelling*, Nov 10, 2012, Vol.246, p.1(10).transition in adherent cell colonies.

DOBRAMYSL, ULRICH ; TÄUBER, UWE C. Environmental versus demographic variability in two-species predator-prey model. *Physical Review Letters*, 25 January 2013, Vol.110(4), pp.048105.

FICHTHORN, K. W.; WEINBERG, W. H. Theoretical foundations of dynamical monte carlo simulations. *Journal of Chemical Physics*, v. 95 (2), p. 1090–1096, 1991.

LOTKA, A.J *Elements of Physical Biology* (William and Wilkins, Baltimore, 1925).

METROPOLIS, N., et al *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*. *J. Chem. Phys.* 21, 1087 (1953).

MORADI, S. et al. Predator-prey model for the self-organization of stochastic oscillators in dual populations. *Physical Review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, Vol.92(6), 2015.

PARKER, M. KAMENEV, A. Mean Extinction Time in Predator-prey Model. *Journal of Statistical Physics*, 2010, Vol.141(2), pp.201-216.

TOME, T. OLIVEIRA, M.J., Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade. Edusp, 2001.

VAN KAMPEN, N. G. Stochastic Processes in Physics and Chemistry. Amsterdam: North-Holland, 2007.

VOLTERRA, V Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together, In: R.N. Chapman, Animal Ecology, (McGraw–Hill, New York, 1931).